



UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Màster en Professor/a d'Educació Secundària

**ANÀLISI DE LA INTERPRETACIÓ DELS TERMES
LITERALS PER ALUMNES DE SECUNDÀRIA**

Memòria de Treball de Fi de Màster presentada per:

MÍRIAM ORTEGA PONS

Tutoritzada per:

Dr. Luis Puig Espinosa

Departament de Didàctica de la matemàtica

València, 11 de setembre de 2012

Fitxa tècnica:

Màster: Màster en Professor/a d'Educació Secundària per la Universitat de València

Especialitat: Matemàtiques

Autora: Cognoms: Ortega Pons
Nom: Miriam

Títol de la memòria: Anàlisi de la interpretació dels termes literals per alumnes de secundària

Tutor 1: Cognoms: Puig Espinosa
Nom: Luis
Departament: Didàctica de la matemàtica

Data de defensa:

Qualificació:

Paraules clau: Aprenentatge de l'àlgebra, interpretació de les lletres, comprensió dels nens.

Keywords: Learning algebra, interpretation of the letters, children's understanding.

Codis Unesco: Formació de professors (5803.02), Matemàtiques (12), Didàctica de l'àlgebra (1201.99).

Resum: El present treball és un estudi exploratori de les interpretacions que fan un grup d'alumnes de secundària dels termes literals. Per a la pertinent extracció d'informació s'ha emprat un test dissenyat per Küchemann i posat a prova en els anys 1976, 1977 i 1978. A més, s'inclou l'anàlisi detallat de les dificultats i errors presentats, així com d'alguns dels ítems que s'usen per a identificar dites interpretacions.

Índex

1. INTRODUCCIÓ

2. ANTECEDENTS

2.1. ELS ORÍGENS DE LES INVESTIGACIONS EN ÀLGEBRA I LES FONTS DE SIGNIFICAT

2.2. ERRORS FREQUENTS

2.3. INVESTIGACIÓ DE KÜCHEMANN

3. DESCRIPCIÓ GENERAL DE LA EXPERIÈNCIA I METODOLOGIA EMPRADA

4. CONTEXT I POBLACIÓ DE L'ESTUDI-TRACTAMENT

5. EL TEST

5.1. EL DISSENY DEL TEST I LA SEUA APLICACIÓ

5.2. DIFICULTATS I ERRORS

5.3. ANÀLISI DELS DIFERENTS TIPUS D'INTERPRETACIONS DE LES LLETRES

6. ANÀLISIS DELS CASOS

7. ENTREVISTES

8. SUGGERIMENTS I CANVIS PER A FUTURES APLICACIONS

9. RESUM DE RESULTATS I CONCLUSIONS

10. BIBLIOGRAFIA

ANNEXES

1. INTRODUCCIÓ

Tal com diu Freudenthal (2001), el llenguatge algebraic és un llenguatge formal amb una estructura clara que permet expressar les relacions amb precisió i simplicitat. Al contrari que el llenguatge vernacle que pot resultar ambigu ja que, en nombroses ocasions, es fa ús de termes que poden tindre una multiplicitat de significats, fet que provoca una inevitable incertesa.

Així i tot, els estudiants que s'inicien en l'àlgebra troben dificultats quan a l'enteniment d'aquesta rama de la matemàtica, potser degut a problemes de comprensió i/o interpretació de la seua estructura i llenguatge o al canvi de concepció que ha de produir-se al passar de l'estudi de l'aritmètica al de l'àlgebra, entre altres factors. En particular, una de les dificultats que en molts casos no permet que l'alumne avance en el procés de comprensió de l'ensenyament en àlgebra és la incorrecta interpretació dels termes literals.

En aquest treball anem a centrar-nos en identificar les interpretacions i usos que fan de les lletres un grup d'estudiants de secundària, en concret del segon cicle de la ESO, i tractarem d'establir una sèrie de conclusions després de l'anàlisi dels resultats obtinguts.

Per a mi l'oportunitat de poder abordar l'estudi d'aquesta problemàtica va ser irrefutable i ha resultat molt interessant i fructífer ja que és un tema que té un interès especial per a mi per la dificultat que provoca en els estudiants i, a banda, m'ha ajudat a entendre millor quines són algunes d'aquestes dificultats. A més, ha estat una oportunitat per a aprendre les causes dels possibles errors comesos, principal punt per a abordar les possibles solucions.

Per a aquesta identificació de les lletres, hem fet ús d'un test extret de l'estudi realitzat per Küchemann (1981), junt amb un extens equip d'investigadors, durant els anys vuitanta a Anglaterra sobre aquest mateix tema. Aquest estudi formava part del programa d'investigació "Concepts in Secondary Mathematics and Science" (CSMS) i la finalitat del qual era, entre altres, analitzar els tipus d'interpretació de les lletres per part d'alumnes de 13, 14 i 15 anys i establir les pertinents comparacions.

Cal remarcar que l'objectiu d'aquest experiment no és, ni molts menys, simular l'estudi fet per Küchemann (1981), ja que per a això necessitaríem més temps, recursos i coneixements sobre el tema. Simplement emprarem part del seu material i consultarem les observacions que ell va fer per realitzar un estudi a menor escala amb la finalitat d'esbrinar el tipus d'interpretació de les lletres en un context determinat per part d'un grup reduït d'estudiants. A més, nosaltres considerarem una mostra d'estudiants no homogènia, és a dir, formada per un major nombre d'estudiants que

presenten dificultats en matemàtiques que si agafarem una mostra aleatòria. Açò és degut que els alumnes que col·laboren en aquest experiment són 20 estudiants de 3r d'ESO A i 9 més de l'assignatura optativa taller de matemàtiques impartida en l'IES Càrcer.

Passem, doncs, a explicar la estructura del present treball. Cal dir que s'ha optat per organitzar els capítols cronològicament segons van tindre lloc cadascun dels passos seguits en la experiència.

Abans de res, començarem fent una xicoteta revisió bibliogràfica en la qual abordarem els temes que posteriorment es tractaran al llarg del treball. Seguirem amb una descripció general de la experiència, així com de la metodologia emprada per al recull de dades. També analitzarem en detall el context i la població de l'estudi-tractament.

Després d'açò ens centrarem en el test. Explicarem com es va dissenyar i quins ítems es van posar a prova i perquè. També detallarem com i quan va tindre lloc l'aplicació d'aquest, així com les dificultats i els errors observats durant aquest procés. Per últim, es farà un estudi d'alguns ítems del test sobre el tipus d'interpretació mínima de les lletres requerida per resoldre'ls amb èxit fent, al mateix temps, al·lusions a algunes de les respostes donades pels estudiants.

Posteriorment, s'establirà una classificació justificada dels alumnes en 4 grups seguint uns certs criteris, fet que ens permetrà establir una sèrie de conclusions per a cada grup. Després agafarem un representant de 3 dels 4 grups per a realitzar una entrevista, en la qual els alumnes explicaran com han resolt cada ítem del test i de la qual s'extrauran una sèrie de conclusions.

Per finalitzar, s'inclou un apartat amb suggerències i canvis per a futures aplicacions del test i un resum dels resultats obtinguts i les conclusions més importants a què s'han arribat.

Per últim, hem d'assenyalar que en els annexos es poden trobar el test que hem utilitzat per a l'extracció d'informació, algunes taules que serveixen d'aclariment i resum de les dades obtingudes i també la transcripció de les entrevistes. A més, també hem adjuntat un anàlisi més detallat de les dificultats i errors dels alumnes observats al llarg de l'experiment, del qual se'n fa un resum en l'apartat 5.2 del present treball.

Es disposa de les gravacions que es van realitzar de les entrevistes als alumnes, però sols en format CD.

2. ANTECEDENTS

2.1. ELS ORÍGENS DE LES INVESTIGACIONS EN ÀLGEBRA I LES FONTS DE SIGNIFICAT

Les investigacions en aquest camp de la didàctica de la matemàtica han anat desenvolupant-se amb el pas dels anys. Als inicis, quan el PME (Psychology of Mathematics Education) fou fundat, el que despertava major interès entre els seus components en aquesta especialitat eren, com apunta Kieran (2006), els conceptes i procediments algebraics, la resolució de problemes verbals algebraics i les dificultats dels estudiants durant el procés de transició de l'aritmètica a l'àlgebra. Tanmateix, amb el temps, les investigacions en l'àmbit de l'àlgebra realitzades pel PME s'ampliaren per a abordar altres temes com ara la generalització, les múltiples representacions i l'ús de ferramentes tecnològiques, així com les diferents perspectives en el contingut d'àlgebra i una àmplia varietat de marcs teòrics sobre l'aprenentatge i ensenyament d'aquesta. Fou aleshores quan el focus d'atenció i principal punt a analitzar passà a ser l'ensenyament de l'àlgebra i el professor que impartia dita matèria.

Posteriorment, conforme anaren evolucionant les distintes rames d'investigació en el camp de l'àlgebra, els investigadors del PME començaren a preguntar-se quines podrien ser les principals fonts de significat en matemàtiques, és a dir, les fonts a partir de les quals els alumnes construeixen els seus propis significats sobre un concepte o tema.

Radford (2004), citat en Kieran (2006), considera que el significat en l'àlgebra prové de tres principals fonts primàries: (i) la pròpia estructura de l'àlgebra, (ii) el context del problema i (iii) l'exterior del context del problema (és a dir, l'activitat lingüística, els gestos i el llenguatge corporal, la imatge construïda, la experiència viscuda...).

Basant-se en aquesta classificació, Kieran (2006) estableix que les principals fonts de significat en àlgebra són:

- 1.- El significat des de l'interior de les matemàtiques, que es divideix en:
 - El significat des de la pròpia estructura algebraica, incloent la forma de la lletra o símbol.
 - El significat des de múltiples representacions (gràfics, taules...).
- 2.- El significat des del context del problema.
- 3.- El significat des de l'exterior del context del problema.

A més, cal destacar que segons l'origen del significat atribuït per l'alumne a un determinat concepte o element, es produeixen una sèrie de dificultats i errors que han sigut estudiats per diversos investigadors. Els més significatius es recullen a continuació.

2.2. ERRORS FREQUENTS

Els adolescents, al començar l'estudi de l'àlgebra, s'emporten amb ells les nocions i enfocaments que empraven en aritmètica. Tanmateix, l'àlgebra no és simplement una generalització de l'aritmètica. Aprendre àlgebra no és merament fer explícit allò que estava implícit en l'aritmètica. L'àlgebra, com afirmen Kieran i Filloy (1989), requereix un canvi en el pensament de l'estudiant de les situacions numèriques concretes a proposicions més generals sobre nombres i operacions.

Per tant, el fet que els adolescents que inicien l'estudi de l'àlgebra continuen emprant els mètodes que els funcionaven en aritmètica provoca nombrosos errors. Passem a citar-ne alguns, a més de les dificultats més freqüents observades en els alumnes per diversos investigadors i que, a més, es podran observar posteriorment en l'anàlisi de les respostes donades pels estudiants analitzats en el present treball:

- Forma de veure el signe igual:

A aritmètica, la presència del signe igual indica que hi ha que realitzar una tasca. Ara bé, en àlgebra aquest signe pot tindre diferents significats, com ara el d'equilibri entre el costat dret i esquerre d'una equació. És per això que, com diuen Kieran i Filloy (1989), cal un canvi de percepció durant el procés de transició a l'àlgebra.

Freudenthal (2001) també parla d'una transformació quant al significat d'aquest signe segons el context en què es trobe. Afirmar que, a banda dels significats que acabem de citar, també hi ha alumnes que n'atribueixen d'altres. Alguns d'ells donen 0 com a resposta de $8 \div 4$, és a dir, interpreten el signe igual com la tasca de trobar el residu d'una divisió. D'altra banda, també pot prendre el significat d'"expandir" o "reduir" si es troba en contextos com $(a+b)(a-b) = \dots$ o $a^2 - b^2 = \dots$. Aquest és un significat més propi de l'àlgebra, però semblant al significat característic de l'aritmètica: la indicació de realització d'una operació.

- Dificultats amb les convencions de notació:

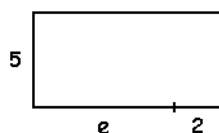
Un dels errors més freqüent per part dels alumnes és considerar $2x$ com $2+x$, en compte de $2 \cdot x$. Kieran i Filloy (1989) afirmen que aquest error és degut que en aritmètica la concatenació significa addició; per exemple 37 significa $30+7$.

Com abans, *estendre la generalització sobre la base del que era correcte en aritmètica pot conduir a una errònia interpretació dels termes literals per part dels alumnes* (Kieran i Filloy, 1989).

Altra convenció que aquestos no solen emprar en l'aritmètica elemental és l'ús de parèntesis, el consideren innecessari per a denotar l'ordre en què s'han d'efectuar les operacions. A més, Freudenthal (2001) afirma que potser als alumnes els resulta complicat d'assimilar la necessitat del seu ús degut que en el llenguatge vernacle tampoc no s'empren dispositius estructurals d'aquest tipus per tal de prioritzar alguna cosa sobre altra.

De la mateixa manera, la jerarquia convencional de les operacions pareix ser un conjunt innecessari de regles per als estudiants que comencen amb l'àlgebra.

No sols creen dificultats les convencions numèriques, sinó també la notació que ha d'emprar-se per a expressar respostes de tipus algebraic, en les quals apareixen termes literals (Kieran i Filloy, 1989). N'és un exemple un dels ítems analitzats en el present treball, i prèviament estudiat per Küchemann (1981). En aquest es demana als alumnes que determinen l'àrea del rectangle que es mostra en la figura següent, al qual molts dels alumnes responen $5e$, $10e$ o $e+10$, entre altres respostes incorrectes:



Posteriorment s'analitzarà l'ítem amb més deteniment.

- Reticència en l'acceptació de la "falta de clausura" (desenvolupada per Collis, 1975, citat per Kieran i Filloy, 1989):

Fa referència al dilema que se'ls presenta als alumnes quan el resultat d'operar amb lletres no és numèric, sinó que la resposta és el propi procediment, cosa que no és habitual en aritmètica. Per això, alumnes que experimenten aquest dilema donen respostes com ara $5+b=7$ quan se'ls demana que sumen 5 i b .

Matz també l'anomena dilema "procés-producte" (Matz, 1980, citat en Kieran i Filloy, 1989).

- Expressions i equacions:

Quant a les expressions, hi ha alumnes que tenen dificultats per a construir-ne un significat si manquen de signe igual. Chalouh i Herscovics (1984), citats en Kieran i Filloy (1989), realitzaren un experiment per a que els alumnes superaren la incapacitat d'acceptar expressions algebraiques com a solucions de problemes. En aquest estudi, es va detectar que els estudiants pensaven

que expressions que representaven àrees de figures, com ara $2x+5x$, estaven incompletes en algun sentit. Es sentien obligats a expressar-les com part d'una igualtat, com ara bé $A=2x+5x$. Aquest fet també es pot observar en algunes respostes del test.

D'altra banda, quant a les equacions, cal dir que la majoria de les dificultats que apareixen (sobretot en estudiants que s'inicien amb elles) són que el context en què se'ls presenten als alumnes sol ser abstracte i allunyat d'un context que represente autèntiques situacions reals. Per això, l'alumne presenta dificultats per a interpretar-les i, sovint, dona respostes incorrectes. A més, Kieran i Filloy (1989) afirmen que quan es demana als alumnes que escriguen una equació, freqüentment ho fan escrivint el resultat del càlcul al costat dret del signe igual. Aquest fet fa pensar que els alumnes potser no tinguen assimilat el significat de simetria que posseeix el signe igual en aquest context, cosa que ocasiona greus errors.

Altres errors que es cometien freqüentment en àlgebra són deguts, com explica Kieran (2006), a la polisèmia del signe menys en expressions algebraïques i equacions. Aquest pot tindre el significat equivalent a "realitzar l'operació de restar", però també pot referir-se al signe del propi nombre, depenent del context en que es trobe.

A més, també es produeixen nombrosos errors deguts que els alumnes no interpreten els termes literals com caldria per poder resoldre els problemes proposats de forma satisfactòria. Els significats que els estudiants d'àlgebra assignen a les lletres han sigut estudiats sistemàticament per Küchemann (1981). Més detalls de la seua investigació es poden observar tot seguit.

2.3. INVESTIGACIÓ DE KÜCHEMANN

El treball que realitza Küchemann (1981) és part d'un projecte d'investigació realitzat pel CSMS a final dels anys setanta, format per un equip de matemàtics, l'objectiu dels quals era establir una jerarquia d'enteniment en distints temes de matemàtiques que aportara informació als professors de secundària i altres per al disseny dels nous currículums.

En particular, el treball de Küchemann (1981) es centra en la investigació dels nivells d'enteniment sobre l'àlgebra realitzat a un grup d'alumnes d'edats entre 13 i 15 anys de distints centres d'Anglaterra durant 1976, 1977 i 1978. Aquest estudi pretén analitzar la interpretació que fan aquests dels termes literals mitjançant l'aplicació d'un test prèviament analitzat. Posteriorment s'efectua un estudi més detallat dels resultats basant-se en entrevistes realitzades a una mostra suficientment gran dels alumnes participants en l'experiment.

TIPUS D'INTERPRETACIONS DE LES LLETRES

Els ítems del test foren dissenyats, com comenta Küchemann (1981), tenint en compte dos criteris: La complexitat estructural de cadascun d'ells i el significat que es pot donar a les lletres.

Aquestes preguntes constitueixen una mostra de les activitats típiques de secundària d'àlgebra en l'època en què es va dissenyar el test. A més, no contenen vocabulari tècnic ni específic per tal d'evitar possibles dificultats en la comprensió dels alumnes i inclouen procediments com el de substitució o el de simplificació, i tasques com les de construir, interpretar i resoldre equacions.

En un inici, aquest test comptava amb 51 ítems però, al considerar-se que era una mostra massa nombrosa per a ser investigada en profunditat, es van emprar dos criteris per determinar un test definitiu amb un contingut més específic. Aquests criteris foren: la complexitat estructural dels ítems i el significat que se'ls podia donar a les lletres per part dels xiquets.

Al final es descartaren 21 dels 51 ítems, entre altres coses, per ser de característiques semblants a altres o tindre les mateixes finalitats. Així va resultar més fàcil determinar el nivell d'enteniment dels alumnes i trobar sentit als resultats obtinguts.

A més, durant la investigació, es van trobar sis formes d'interpretar els termes literals per part dels alumnes, que Küchemann (1981) va classificar en:

- Lletra avaluada: Consisteix en donar-li un valor numèric a la lletra per tal de no tindre que operar amb ella com a incògnita específica. La categoria es refereix als ítems en els quals es demana trobar un valor específic per a allò desconegut o a les respostes en què els alumnes assignen un valor a allò desconegut per a simplificar (de vegades, sol assignar-se-li el nombre corresponent al lloc que ocupa aquest a l'abecedari).
- Lletra ignorada: S'ignora la lletra o es reconeix la seua existència, però sense donar-li significat, s'opera sense tindre-la en compte. En aquesta categoria s'inclouen els ítems als que es pot donar resposta sense emprar la incògnita ja que pot ser essencialment eliminada mitjançant el corresponent procediment per a centrar l'atenció en altres aspectes. També fa referència a les respostes en què els alumnes ignoren les lletres per complet.
- Lletra com a objecte: S'empra la lletra però sense considerar-la, és a dir, com una taquigrafia o un objecte en sí mateix. Aquesta categoria ha sigut discutida molt en el context d'àrees i perímetres, en els quals s'usa la lletra per a designar les mesures dels costats de les figures, més bé com a mesures

desconegudes. També es pot emprar la lletra com a objecte amb èxit en alguns ítems de simplificació d'expressions algebraïques.

Considerar les lletres com a objectes fa que la seua resolució siga més fàcil que si les considerem com a incògnites específiques, tot i que, com veurem més endavant (en l'anàlisi de les preguntes) no es pot aplicar en tots els casos ja que pot portar-nos a cometre errades importants.

- Lletra com a incògnita específica: La lletra és considerada com un nombre particular, específic, però no conegut i s'opera directament sobre ell. Tot i que la idea de nombre desconegut és encara una noció molt primitiva, ja comença a veure's la incògnita en sí mateixa.
- Lletra com a nombre generalitzat: La lletra és vista com a representant de diversos valors (en lloc de solament com a un, com passava al cas anterior) o com a què pot prendre més d'un valor, però no simultàniament. (Mirar el cas de l'ítem 23 b))
- Lletra com a variable: La lletra és vista com a representant d'un rang o conjunt de valors no especificats simultàniament, baix una relació sistemàtica. Implica un tipus d'interpretació de la incògnita el valor de la qual canvia.

Cal remarcar la diferència existent entre identificar la lletra com a nombre generalitzat i com a variable ja que pot donar lloc a confusió. Küchemann (1981) explica aquesta diferència emprant l'ítem 28 del test que es pot trobar a l'apartat 1.1 de l'annex A. Aquest diu que es pot considerar que els alumnes que interpreten els termes literals com a nombres generalitzats són aquells que responen la pregunta donant més d'un parell de valors que compleixen l'equació $5b+6r=90$, com per exemple $(6, 10)$, $(12, 5)$, $(0, 15)$, $(18, 0)$ ja que consideren que hi ha més d'un valor que verifica l'enunciat. En canvi, els alumnes que donen com a resposta la mateixa relació $5b+6r=60$, estan indicant com aquesta canvia, és a dir, donen la relació que ens permet comparar els valors entre sí d'alguna manera, no els nombres mateixos. Tot i això podria haver alumnes que interpretaren aquestes lletres com a incògnites específiques o inclús com a nombres generalitzats per això, a priori, no podem establir conclusions precipitades sense realitzar abans un anàlisi més exhaustiu.

D'altra banda, Küchemann (1981) comenta que és complicat trobar un ítem el qual tan sols pugui ser resolt emprant la lletra com a variable i que servisca per tal d'identificar si hi ha alumnes que arriben fins a aquest punt d'interpretació. Per aquesta raó, aquest va decidir crear l'ítem 10 que es mostra al test.

Cal dir, però, que la interpretació que fan els xiquets de les lletres no sols depén de la complexitat de la qüestió, sinó també de la naturalesa d'aquesta. Küchemann (1981) afirma que les tres primeres formes d'interpretació dels termes literals són descrites com formes en les que es tracta d'evitar generalitzar l'aritmètica, és a dir, d'evitar operar amb autèntiques incògnites. És per això que identifica les tres primeres categories com les tres formes més elementals del maneig de les lletres i afirma que generalment l'ús d'alguna de les tres últimes requereix un nivell més elevat de coneixement.

NIVELLS D'ENTENIMENT

A més dels tipus d'interpretacions que es podien fer dels termes literals, Küchemann (1981) va establir una classificació per als 30 ítems que es portaren a estudi. Els va ordenar en quatre grups de manera que cada grup cobrira un diferent rang d'habilitats de comprensió basant-se també en la complexitat estructural dels ítems i en la naturalesa d'aquests. Segons aquesta classificació, anem a agrupar els ítems que s'han portat a anàlisi en els següents nivells:

- Nivell 1: Els ítems que pertanyen a aquest nivell són purament numèrics (7b, 7b', 8a1, 8b1, 19a, 19b, 20 i 22a) o tenen una estructura simple i poden ser resolts considerant les lletres com a objectes (12a i 21a), per avaluació de les lletres (1, 15a i 25b) o ignorant aquestes (13a).
- Nivell 2: Si comparem els ítems d'aquest nivell amb els del nivell 1, aquestos presenten una major complexitat, tot i que la lletra encara pot ser avaluada (9, 14a, 14b i 15b), ignorada (8a2, 8b3 i 13b) o emprada com a objecte (4, 7c, 7c', 12d, 19c, 21b i 21c). Els xiquets que es troben en aquest nivell no són capaços encara d'identificar els termes literals com a incògnites específiques, nombres generalitats i molt menys com a variables.

Un dels aspectes que distingeix aquests ítems amb els del nivell anterior és l'augment en la familiaritat amb la notació algebraica.

- Nivell 3: El que més destaca dels xiquets que es troben en aquest nivell és que ja són capaços d'usar les lletres com a incògnites específiques, tot i que sols quan la estructura de l'ítem és simple. A més, són capaços de donar respostes com ara $8 + g$, $3n + 4$, $p = 2n$ usant les lletres com a nombres i no com a objectes. Els ítems que es troben en aquest nivell són: 2, 3, 6, 8a3, 12b, 12c, 12g, 12h, 12i, 13c, 16, 17, 21d, 22b, 23a i 24.

- Nivell 4: En aquest nivell els xiquets ja poden tractar els termes literals d'ítems amb estructura complexa com a incògnites específiques (5, 8b2, 11, 12e, 12f, 19d, 27 i 28). A més, són capaços de fer front a altres com 18a, 18b, 25a i 26 en els quals es requereix, com a mínim, tractar les lletres com a nombres específics, tot i que es produeix una forta temptació a tractar-los com a objectes.
També pertanyen a aquest nivell els ítems que requereixen emprar la lletra, al menys, com a nombre generalitzat (23b).
I, a més, també s'inclou la pregunta 10, en la qual cal interpretar la lletra com a variable per poder respondre-la amb èxit.

En conclusió, els ítems dels nivells 1 i 2 poden ser resolts sense tindre que operar amb incògnites, mentre que els dels nivells 3 i 4 requereixen que les lletres siguin tractades com a incògnites específiques i, en alguns casos, com a nombres generalitzats o variables. A més, cal destacar que dins d'aquests parells de nivells, les diferències que s'estableixen són purament estructurals.

A l'apartat 1.2 de l'annex A es pot observar una taula on es mostra un resum d'aquesta classificació dels ítems en els distints nivells d'enteniment i segona la interpretació mínima requerida.

3. DESCRIPCIÓ GENERAL DE LA EXPERIÈNCIA I METODOLOGIA EMPRADA

Aquesta experiència va tindre lloc al llarg del segon període de pràctiques (comprés entre el 20 de febrer i el 4 d'abril) del Màster universitari en professor/a d'Educació Secundària, ofertat per la Universitat de València, durant el curs acadèmic 2011/2012 en el centre IES Càrcer. Va ser efectuada amb èxit gràcies a la col·laboració tant de la meua tutora del centre com dels alumnes dels grups de 3r d'ESO A i de taller de matemàtiques (format per estudiants de 3r d'ESO B i C del mateix centre) en els quals impartia classe aquesta.

La experiència va consistir, bàsicament, en l'aplicació d'un test als dos grups d'alumnes i la posterior realització d'una entrevista a alguns d'ells per poder determinar i interpretar millor els resultats obtinguts en aquest i poder establir les conclusions pertinents. Tot seguit s'explica la experiència amb més deteniment.

En primer lloc, cal dir que el test que es va utilitzar en dita experiència es va crear a partir d'una selecció de preguntes extretes, i convenientment adaptades, del test que fou redactat pel CSMS Mathematics Team: Children's Understanding of Mathematics; de Küchemann (1981).

Tot i que per a respondre dites preguntes no cal tenir coneixements previs d'àlgebra, abans de triar quines d'elles s'inclourien en el test, es va consultar al DOGV (2007) tant els currículums oficials de 3r d'ESO i dels cursos anteriors, com les competències que, suposadament, haurien d'haver adquirit els alumnes fins al moment ja que aquest fet probablement condicionaria les respostes d'aquestos. A més, es va assistir a classe amb els alumnes des del primer període de pràctiques, durant el qual es va poder observar en quin context es trobaven abans de la realització del test, així com el nivell en general que presentaven els estudiants dels respectius grups. L'elecció dels ítems que conformen el test es va fer considerant tots aquestos factors.

Quant a la redacció de l'enunciat d'aquestos, cal dir que es va fer intentant eludir l'ús de vocabulari tècnic i específic per tal d'evitar possibles dificultats en la comprensió dels alumnes. A més, cal afegir, com veurem més endavant, que es van seleccionar activitats que inclouen procediments de tots els tipus com ara el de substitució o el de simplificació, i tasques com les de construir, interpretar i resoldre equacions.

Una vegada redactat el test, aquest va ser subministrat als alumnes en tres etapes i posteriorment fou arreplegat per al seu estudi.

Després d'un minuciós anàlisi, en el qual es van estudiar les dificultats que presentaven els estudiants, els errors comesos i els tipus d'interpretacions de les lletres, entre altres; es va dividir els alumnes en distints grups atenent les seues interpretacions. Posteriorment, foren seleccionats tres alumnes, un representant de cada grup distint per a la realització d'una entrevista.

Aquesta entrevista ens va permetre analitzar millor les respostes dels alumnes i ens va ajudar, en alguns casos, a trobar les causes dels errors i de les dificultats aparegudes durant la realització del test, així com l'origen d'algunes de les interpretacions dels termes literals per part dels alumnes. A més, en les respostes donades durant les entrevistes també es va poder constatar que els resultats obtinguts del test ens poden conduir a establir conclusions precipitades.

Durant la realització de les entrevistes, es va procedir a gravar-les i posteriorment a transcriure les conversacions. Aquest fet va permetre analitzar millor encara les respostes i establir una sèrie de conclusions per a cada grup. Les transcripcions es troben a l'apartat 2.2 de l'annex B.

Per últim, i gràcies a les observacions i anotacions que es van fer, s'han pogut afegir algunes suggerències per a la instrucció basades en l'experiment realitzat i en els resultats obtinguts a partir del test i les corresponents entrevistes.

4. CONTEXT I POBLACIÓ DE L'ESTUDI-TRACTAMENT

La població considerada per a l'estudi de la interpretació dels termes literals és un grup format per vint-i-nou alumnes de 3r d'ESO de l'institut d'educació secundària IES Càrrecer. Del total d'alumnes, vint són de la classe de 3r d'ESO A i els altres nou pertanyen a un grup de taller de matemàtiques (tres de 3r d'ESO B i sis de 3r d'ESO C). Cal dir que l'assignatura de taller és una matèria de caràcter optatiu que cursen alumnes amb dificultats en matemàtiques. Aquesta assignatura és imposada des de la direcció del centre i el seu objectiu és afavorir l'aprenentatge de les matemàtiques proporcionant un reforç extra per als alumnes que la cursen. És per això que, en el nostre cas, el grup d'alumnes estudiat no es pot considerar com un exemple de població, sinó com una mostra d'aquesta i, per tant, els resultats no són comparables (en percentatges) amb els obtinguts per Küchemann (1981) en la seua investigació.

Quant als alumnes de 3r d'ESO A, cal dir que en general es tracta d'un grup que mostra una bona actitud a classe, hi ha companyerisme entre ells i el clima a l'aula és l'adequat per a l'aprenentatge, fet que m'ha permés treballar amb ells amb facilitat. Quant als resultats acadèmics, hi ha de tot un poc. Podem trobar alguns alumnes que destaquen sobre la resta, amb una capacitat d'interpretació i anàlisi en matemàtiques bastant desenvolupada i, en canvi, hi ha altres que presenten dificultats importants en el mateix camp. A més, hi ha quatre alumnes que han repetit 3r d'ESO, fet que pot influir en les seues respostes al test.

Pel que fa al context, hem d'indicar que quan els alumnes van realitzar el test (tant els de 3r d'ESO com els de taller) es trobaven començant a estudiar el bloc d'àlgebra, en particular, veient el tema 4 del llibre d'Anaya de 3r d'ESO titulat *El llenguatge algebraic*, el qual es seguia al peu de la lletra. El contingut d'aquest es mostra a continuació:

- Expressions algebraiques.
- Monomis.
- Polinomis.
- Identitats notables.
- Fraccions algebraiques.

Com es comenta més avant, el fet que ja hagueren començat a treballar l'àlgebra en aquest curs influeix en algunes de les seues respostes, sobretot en les preguntes en què apareixen expressions similars a les identitats notables. La pregunta 12 del test n'és un exemple. Aquesta consta de 9 apartats en els quals es demana als alumnes que escriguen de forma més simplificada una sèrie d'expressions. Un exemple de resposta

en la qual es reflexa el que acabem de comentar és $(a+b)+(a-b)=a^2-b^2$, en què l'alumne estableix una mena de paral·lelisme amb la fórmula $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

A més, si consultem el currículum dels cursos anteriors, podem observar que l'àlgebra s'introdueix en el primer curs de la ESO, pel que podem afirmar que els alumnes ja posseïen unes nocions i tècniques bàsiques per a enfrontar-se al test de manera distinta a la que s'enfrontarien si la mostra d'alumnes fora de 1r d'ESO.

D'altra banda, cal comentar que quan es realitzaren les entrevistes als alumnes seleccionats, aquestos es trobaven finalitzant el tema 5, *equacions*, el contingut del qual és:

- Equacions. Solució d'una equació.
- Equacions de primer grau.
- Equacions de segon grau.
- Resolució de problemes amb equacions.

És per això que, com es pot observar a les entrevistes, alguns alumnes són capaços de corregir les seues pròpies respostes i mostrar raonaments més avançats.

5. EL TEST

5.1. EL DISSENY DEL TEST I LA SEUA APLICACIÓ

El test emprat per a l'anàlisi de les interpretacions dels termes literals per part del grup d'alumnes de secundària fou elaborat a partir del que va usar Küchemann (1981) per al projecte d'investigació Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS) en què estava immers.

De les distintes versions del test de les quals es disposava, es van seleccionar els ítems adequats per al nivell dels alumnes i aquells dels que es pensava que podria extreure's la informació pertinent per a poder determinar les interpretacions d'aquestos. Posteriorment, es van classificar els ítems segons els nivells que estableix Küchemann (1981), basant-se en la complexitat estructural de cadascun i en les possibles interpretacions que es poden fer de les lletres, a més d'eliminar els que aportaven informació similar.

El test es va dividir en tres parts per a regular la seua administració ja que es desconeixia el temps exacte del qual es disposaria per a poder aplicar el test.

La primera part consta d'onze preguntes, les huit primeres són d'operacions algebraïques, avaluacions de lletres i assignacions, la 9 i la 10 fan referència a l'ordre d'expressions algebraïques i la 11 combina geometria i àlgebra. Cal dir que les preguntes 2, 3, 4, 5 i 6 són d'elegir entre una sèrie d'opcions plantejades, de manera que l'alumne ha de senyalar totes les que crega que són correctes.

La segona part és la més llarga i està formada per 11 preguntes. De la 12 fins la 18 són de resolució d'operacions algebraïques (probablement més complexes que abans ja que ara no es dóna a elegir entre possibles respostes) i simplificació d'expressions. D'altra banda, de la 19 fins la 22 són de geometria i àlgebra, és a dir, s'han d'emprar conceptes de geometria, com el càlcul d'àrees i perímetres, però amb mesures desconegudes, pel que entra en joc l'àlgebra.

Per últim, la tercera part del test compta amb 6 preguntes d'enunciat verbal, algunes d'elles situades en context real, que inclouen tasques de distints tipus com ara: interpretació d'enunciats i termes literals i resolució d'equacions.

A més, cal dir que dins de cada ítem, els apartats estan ordenats de menor a major dificultat segons la classificació que va establir Küchemann (1981) derivada de la seua experiència.

Es va pensar en dividir el test d'aquesta manera ja que així els alumnes podien completar-lo amb més tranquil·litat, sense estressar-se al veure tanta pregunta. I, a

més, si no donava temps a completar-lo del tot, sempre podria passar-se alguna de les parts en la classe següent.

A cada alumne se li va assignar un nombre per tal de mantindre en tot moment l'anonimat i aquest seria el seu codi per a identificar el test. A més, es va sol·licitar que indicaren el seu sexe, així com la data del seu naixement per si aquesta informació resultava rellevant en algun moment. Cal dir que als alumnes de 3r d'ESO A se'ls va assignar el seu nombre de llista (d'1 fins 22, llevat dels alumnes 4 i 13 que no van assistir a classe eixe dia) i als de taller, l'indicat per mi (4, 13, 23, 24, 25, 26, 27, 28 i 29). Posteriorment, es podrà observar que els resultats són significatius per a cada grup indicat.

El test es va administrar el dia 1 de març als alumnes de 3r d'ESO A i el dia 2 als de taller. Per a l'administració del test es van disposar d'un total de 55 minuts, temps de durada d'una classe sencera.

Els primers 5 minuts es van dedicar a recol·locar els alumnes de forma individual i a donar-los les instruccions pertinents. Se'ls va dir que se'ls administraria un test per etapes que haurien de completar. També se'ls va recomanar que es centraren en algunes preguntes ja que era preferible a intentar respondre-les totes de forma superficial, ja que així a mi em seria més fàcil determinar les atribucions de significat que realitzaren aquestos. També se'ls va advertir que tot càlcul que realitzaren el feren en els mateixos fulls del test o en un full a banda que posteriorment haurien d'adjuntar.

Tot seguit, es va administrar la primera part del test que completaren passats 15 minuts. Després es va arreplegar i es va repartir la segona, la qual tardaren 20 minuts en emplenar del tot. I, per últim, es va administrar la tercera part que tardaren uns altres 15 minuts, just el temps del qual es disposava.

A l'apartat 1.3 de l'annex A s'inclou una taula en la qual apareixen indicades si les respostes dels alumnes a cada ítem són correctes o no. En particular, es denota amb B quan la resposta donada per l'alumne és correcta, I quan és incompleta i M quan és incorrecta. A més, escrivim un guió quan l'alumne deixa la pregunta en blanc.

Cal ressaltar que hem considerat com a correctes (perquè en realitat ho són) respostes en les quals l'alumne pot simplificar o agrupar més una expressió i no ho fa, ja que no s'entén si no ho fa perquè no sap o perquè no ho creu convenient. Un exemple n'és la resposta $3n-4$ de l'alumna 1 a la pregunta 8.b.3). El que es demana en realitat és que responga $12n$ però $3n-4$ també és correcte.

D'altra banda, hem de dir que les respostes que considerem incompletes són aquelles que no són del tot correctes però que no van desencaminades i/o que no contenen cap error. N'és un clar exemple la resposta $c=1,2,3,4$ de l'alumna 11 a la pregunta 16.

La resposta no està completa del tot però tampoc no està malament i no podem classificar-la com a incorrecta, simplement està incompleta.

Poden observar-se també les taules que es troben als apartats 1.4 i 1.5 de l'annex A per obtenir una visió global dels resultats obtinguts per ítem i per alumne respectivament.

5.2. DIFICULTATS I ERRORS

Tot seguit anem a analitzar les dificultats que han trobat els alumnes per a respondre les preguntes del test, a més dels errors comesos i les possibles causes que els han pogut provocar. A continuació se'n mostra un resum, l'anàlisi complet es troba a l'apartat 2.2 de l'annex B.

A més, també es poden consultar les taules incloses en els apartats 1.4 i 1.6 de l'annex A per a observar amb més detall la informació obtinguda per a cada pregunta. A la taula de l'apartat 1.4 es mostren els resultats de respostes correctes, incompletes, incorrectes i en blanc per cada ítem i en la de l'apartat 1.6 els errors comesos en cadascuna d'elles i el percentatge en què s'han produït.

Observant la taula 1.4, podem destacar una sèrie de dades que resulten rellevants. Notem que les preguntes 10 i 17 són de les que provoquen majors dificultats entre la nostra mostra d'alumnes ja que no han sigut contestades correctament per cap d'ells. Cal destacar, també, que les preguntes 10 i 18b han sigut les que presenten un major nombre de respostes incorrectes, en ambdós casos les han respost de forma incorrecta 26 dels 29 alumnes. Açò podria ser o bé per falta de comprensió de l'enunciat o bé per no interpretar els termes literals correctament. A més, també cal destacar que hi ha molts alumnes que deixen l'ítem 15b en blanc. Posteriorment analitzarem aquestes preguntes amb més detall.

Passem ara a comentar les dificultats trobades i els errors comesos, que coincideixen molts d'ells amb els esmentats a l'apartat 2.2 del present treball.

- Un dels errors més freqüents i que s'ha pogut observar en moltes de les respostes a les preguntes del test ha sigut interpretar $5n$ com $5+n$, és a dir, interpretar la manca de signe com una suma. Aquest error, com afirmen Kieran i Filloy (1989), és degut que en aritmètica la concatenació significa addició, és a dir, 37 significa $30 + 7$ i potser els alumnes quan passen a l'estudi de l'àlgebra tracten d'adaptar les concepcions que ja posseïen en aritmètica a aquest context. També podria ser conseqüència d'un ús excessiu d'exercicis d'agrupar als llibres de text en què la resposta ha de ser o bé un nombre o bé un monomi, i no la suma d'un nombre més un terme literal.

A més, la tendència a agrupar persisteix no sols quan apareixen un nombre i una lletra, sinó també quan apareixen dues lletres distintes, com en el cas de la pregunta 12b en què el 48,3% d'alumnes respon $7ab$ com a suma de $2a$ i $5b$.

L'error que acabem d'esmentar apareix també en preguntes com 2, 3, 4, $7b'$, 12b, 12c i 12d, entre altres.

A més, en el context del càlcul de superfícies i perímetres torna a aparèixer aquest error. Molts alumnes responen la pregunta 19d donant respostes com ara $5e2$, $10e$ o similars.

- Cal dir que en les preguntes d'elecció de resposta també han aparegut altres dificultats significatives, com són dificultats per veure que $e3$ i $3e$ és el mateix (a la pregunta 3) i per a interpretar $5n$ com $n+n+n+n+n$ (a la pregunta 2), degut probablement a que no s'interpreta la lletra com a incògnita específica.

- D'altra banda, com comenta Freudenthal (2001), molts estudiants no experimenten la necessitat d'emprar parèntesis per a estructurar expressions, fet que queda reflectit a algunes respostes a les preguntes del test. A més, de la mateixa manera, sembla que per a ells la jerarquia convencional de les operacions és un conjunt innecessari de regles.

Aquest fet es pot observar a la resposta $e+2 \times 3$ que alguns alumnes donen a la pregunta 5 del test, en la qual es demana que es senyalen les expressions equivalents a $e+2$ multiplicat per 3. Aquesta resposta requereix l'ús de parèntesi ja que, en cas contrari, s'efectuaria abans el producte que la suma i aquesta opció seria incorrecta. Però, no obstant això, un 24,1% dels alumnes de la mostra analitzada la senyala com a correcta.

El mateix passa en les preguntes 8b2, 11 i 19d, en les quals alguns alumnes responen sense emprar parèntesis. Potser aquestos no siguen realment capaços de veure que el producte afecta a la totalitat de la expressió, o al contrari, que ho siguen però no senten la necessitat de representar-ho o indicar-ho explícitament emprant parèntesis.

- També han aparegut alguns problemes quant a la comprensió de l'enunciat de la pregunta 7. Molts alumnes l'han interpretat malament ja que el que s'havia de fer és imitar en els respectius apartats el que es feia al primer de cada columna. En canvi, alguns alumnes han usat com a model el que es feia a l'apartat a), a la mateixa fila o inclús han donat resultats numèrics, aparentment, sense ningun sentit. Potser caldria modificar la estructura de l'ítem, sense canviar l'objectiu de la pregunta per tal de disminuir les dificultats de comprensió que han aparegut. Aquesta qüestió es tractarà més endavant, a l'apartat de suggeriments per a futures aplicacions del test.

- Altra dificultat que presenten alguns alumnes, i que també es pot observar a les entrevistes, és que no són capaços d'identificar una expressió del tipus $n+4$ com un nombre en sí. La majoria d'ells les interpreten com la suma d'un nombre més una lletra, cosa que potser els funcione en alguns casos per a resoldre algun tipus determinat de problema, però no sempre. Aquest fet es pot observar, per exemple, en les respostes a l'ítem 9, en les quals molts alumnes ignoren la lletra n per a respondre (amb èxit) ja que no li atribueixen cap significat. Però, durant les entrevistes, se'ls demana que comparen expressions com $n+100$ i $x-7$ i diguen quina és més gran. És aleshores quan necessiten interpretar la expressió com un nombre, o més bé, com a diversos nombres ja que en qualsevol altre cas respondrien de forma incorrecta.
- També s'han produït errors per influència del context en el que es trobaven els alumnes, com el d'aplicar de forma errònia les fórmules dels productes notables per a resoldre algun dels ítems. És el cas dels apartats b), g) i i) de la pregunta 12, en els quals alguns alumnes responen $2a+5b=(2+5)(a+b)$, $a+4+a-4=a^2-16$ i $(a+b)+(a-b)=a^2-b^2$ respectivament.
- També presenten dificultats les preguntes en què hi ha que substituir una expressió pel seu valor en una altra. És el cas dels ítems 13a, 13c i 16.
El que menys dificultats presenta és el 13a ja que el resultat és de tipus numèric i també el valor de la expressió que s'ha de substituir, és a dir, $a+b=43$ (que s'ha de substituir en $a+b+2=...$).
En canvi, a l'apartat c del 13 el nombre de dificultats augmenta (i prou) ja que ara molts alumnes responen o bé assignant valors numèrics a les lletres (potser per tal d'obtindre així un resultat totalment numèric) o bé donen la resposta correcta, però afegeixen que no es pot determinar el resultat (potser perquè no conceben $8+g$ com a resultat per no ser numèric). Açò és el que Collis (1975), citat en Kieran i Filloy(1989), anomena falta de clausura.
I, per últim, l'exercici 16 també presenta moltes dificultats (només 10 alumnes l'han resolt correctament), probablement degut que alguns dels alumnes no són capaços d'identificar en l'equació $r+s+t=30$ que $s+t$ val r . De fet, la totalitat dels alumnes que són capaços de fer-ho, completen amb èxit l'exercici.
- Una de les preguntes que ha ocasionat majors dificultats als alumnes ha sigut la pregunta 10 que, com ja hem dit, no l'han resolt correctament cap d'ells. En general, l'error més freqüent ha sigut comparar el signe de les dues expressions, és a dir, la operació que es realitza, no les expressions en sí. És per això que molts d'ells han contestat que $2n$ és major que $2+n$ perquè estan multiplicant-se, sense agafar valors i substituir. En canvi, altres sí que ho han

fet, però només per un o dos valors grans de manera que els ha eixit també que $2n$ és major que $2+n$, sense adonar-se'n que podria haver altres valors per als quals açò no passara.

- Una altra de les preguntes que presenta moltes dificultats és la 17, probablement perquè resulta complicat per als alumnes combinar la equació i la inequació per tal de trobar els possibles valors que pot prendre c . A més, cal considerar un conjunt de valors el més gran possible i aquest ha sigut un dels errors que han comés la majoria d'alumnes, ja que només han considerat que c pot valdre nombres naturals i per això les seues respostes queden incompletes.
- També presenten dificultats els alumnes en la pregunta 18, sobretot en l'apartat b) ja que, a banda dels errors que es produeixen habitualment, els alumnes no saben interpretar com cal la expressió *augmentar en (una certa quantitat)* en eixe cas.

Per una banda, a l'apartat a) els alumnes confonen augmentar en 2 (en a) per tot tipus d'expressions, com ara: duplicar o multiplicar per 2, elevar al quadrat... A més, hi ha alumnes que el que fan és directament substituir la b per 2.

També és interessant observar la resposta de l'alumne 11, que respon $a=b+1$ a la pregunta 18a. La resposta és incorrecta perquè ens pregunten *què val a si b augmenta en 2* i no ha respost a la pregunta però, pel que sembla, aquest alumne ha raonat molt més enllà ja que: si b augmenta en 2, com s'ha de mantindre l'equilibri entre els dos costats de la igualtat ($a=b+3$), a haurà de ser $b+1$.

En canvi, a l'apartat b) ja resulta més complicat augmentar la g en 2 ja que està multiplicada per 3 i, per tant, es produeixen més errors a banda dels que ja es produïen a l'apartat a).

- En els exercicis relacionats amb la geometria també es produeixen nombroses errades (a banda de les que ja s'han comentat), sobretot al no recordar les definicions d'àrea i perímetre o no recordar bé les fórmules per al seu càlcul.

Quant a l'exercici 21, què és de càlcul de perímetres, cal destacar que els primers dos apartats, en què apareixen una i dues lletres distintes respectivament, provoquen poques dificultats entre els alumnes.

Els problemes comencen a augmentar en l'apartat c), que barreja lletres i nombres. És curiós que el 20,7 % dels alumnes donen com a resposta

$P=2u+5^2+6$ i, a més, cal destacar que en l'estudi fet per Küchemann (1981) aquest era també un dels errors més freqüents entre la seua mostra d'alumnes. L'apartat que majors dificultats presenta és el d), potser perquè ara no es mostra la figura completa de la qual es vol calcular el perímetre, sinó part d'ella. A més, ara les dades que coneguem són les mesures dels costats i açò representa un canvi notable respecte als apartats anteriors. Com a conseqüència de dibuixar part de la figura, molts alumnes es limiten a comptar els costats que es mostren i a multiplicar-los per 2, o bé elevar 2 al nombre de costats i donen com a respostes: $P=14 \cdot 2$, $P=2 \times 12$, $P=2^{11}$... A altres respostes es pot observar que l'alumne compta el nombre de costats de la figura i posteriorment els afegeix a $2n$, com ara: $P=2^{14} \cdot n2$, $P=2 \cdot 13+n2$, $P=6+2n$, $P=14+2n$, $P=2 \cdot 14n$...

- També han aparegut problemes per a transcriure a llenguatge algebraic enunciats de problemes verbals, com passa als exercicis 22b i 25a del test, potser degut que els alumnes no atribueixen el significat pertinent als termes literals i per això es produeixen nombrosos errors.

Cal observar que a l'apartat a) de l'exercici 22, que és totalment numèric, només 7 alumnes responen de forma incorrecta. En canvi a l'apartat b), que ens demanen el mateix que a l'anterior però per a una figura amb k costats, en són 14 els que no donen una resposta correcta (donen respostes com ara: x , $k-2$, k , $-3k$...).

D'altra banda, en la pregunta 25 molts alumnes tampoc no són capaços d'escriure la equació que se'ls demana a l'apartat a) a partir de l'enunciat. Molts d'ells ni tan sols donen una equació, sinó expressions com ara $W+h$, $70+2h$, $70W+2h$... O simplement equacions en les quals escriuen a la dreta de l'igual el resultat (o el que pensen que és el resultat) del que hi ha a l'esquerra, com ara en $W+h=Wh$. Recordem que aquest fet ja va ser estudiat per Kieran i Filloy (1989) que, a més, comentaven que podia ser conseqüència de què els alumnes interpreten el signe igual en el sentit de tasca a realitzar, no en el de simetria entre ambdós costats.

El que més crida l'atenció és que, en canvi, alguns alumnes, com ara 1, 6, 7, 13, 16, 22 i 28 resolen l'apartat b) (que suposadament depèn de la resposta donada en l'apartat a)), però no l'anterior. Aquest fet fa pensar que no es basen en l'apartat anterior per a poder respondre, sinó en l'enunciat. Per tant, probablement el seu problema no és l'adequada comprensió i interpretació de l'enunciat, sinó la seua traducció a llenguatge algebraic.

- Cal destacar també les dificultats que presenten els alumnes en la pregunta 23b que, al contrari que en la 23a (que és resposta correctament per la majoria d'alumnes), només 9 d'ells la contesten bé. Potser la major dificultat que troben és veure que M i P, tot i que són lletres distintes, poden prendre el mateix valor.
- Un altre dels errors més comuns en algunes preguntes ha estat, probablement, com a conseqüència d'una lectura literal d'expressions o equacions. Aquest error ha sigut prou freqüent entre la mostra d'alumnes en la pregunta 26, en la qual es demana que diguen el significat de la expressió $4p+3c$ on p és el preu de cada pastís i c el de cada coca. El més natural pareix ser llegir la expressió com *quatre pastissos més 3 coques*, fet que condueix a pensar que $4p+3c$ és la expressió que simbolitza el que s'ha comprat i no els diners que ha costat tot.

Un error similar es dona a l'ítem 28, tot i que la estructura d'aquest és distinta. En aquest ítem, ens pregunten què podem dir de b i r , que són el nombre de llapis de color blau i de color roig respectivament, sabent que 90 són els diners que s'han gastat i que els primers valen 5 cèntims cadascun i els segons en valen 6. La resposta que més ha aparegut, tot i que no en molta freqüència, ha sigut $b+r=90$, resultat d'interpretar la expressió com *els llapis blaus i els rojos costen 90* en compte de *el nombre de llapis blaus i rojos és 90* que seria el significat real d'aquesta expressió.

- Per últim, cal dir que a la pregunta 27 també apareixen certes dificultats que són interessants d'analitzar. Per a resoldre-la, alguns alumnes intenten utilitzar algun mètode de resolució d'equacions inventat per ells mateixos (degut que encara no en coneixen cap per resoldre equacions de grau major o igual que 3). D'altres, substitueixen directament donant-li valors a la x , cosa que pot o no conduir-los a la solució correcta. Sobretot, sembla que quan troben més dificultats, i conseqüentment més errors es produeixen, és a l'hora de comparar l'equació que es vol resoldre amb la que ens donen la solució. Aquest fet es pot observar en respostes dels alumnes com ara: *18, perquè $3x$ significa multiplicar la x per 3 i la x és 6 o 3 perquè la x ara té un 3 davant i abans no*.

Per tant, com s'ha pogut observar, apareixen errors de tot tipus i, alguns d'ells, probablement es produeixen per causes relacionades. Tot i això, per poder determinar les possibles causes que els produeixen, hauríem de fer un estudi amb molta més profunditat sobre cadascuna de les qüestions que s'han tractat. A més, cal destacar que es repeteixen els mateixos errors estudiats pels investigadors anys enrere fet que, com a docents, deuria almenys fer-nos reflexionar.

Després d'analitzar i detallar les dificultats que s'observen en les respostes dels alumnes al test, passem a explicar algunes de les causes que provoquen aquestes dificultats. Ens referim, en particular, a l'ús i interpretació que fan els estudiants dels termes literals.

5.3. ANÀLISI DELS DIFERENTS TIPUS D'INTERPRETACIONS DE LES LLETRES

Una de les causes que produeixen els errors i dificultats que acabem d'esmentar a l'apartat anterior és la incorrecta interpretació o atribució de significat que es fa dels termes literals. Molts alumnes no empren les lletres com cal en determinats contextos o, simplement, no arriben a comprendre els significats més abstractes i, per això, es produeixen errades que és possible evitar amb l'ajuda d'una bona instrucció sobre el tema.

Tot i que a l'apartat anterior s'analitzen les respostes a totes les preguntes del test per a detectar els errors i dificultats dels alumnes (així com les possibles causes que fan que aquestos apareguen), per a estudiar la interpretació que es fa dels termes literals anem a centrar-nos en els ítems que Küchemann (1981) analitza en la seua investigació degut que, com ja hem dit, la resta presenten característiques semblants quant a la seua complexitat estructural i el significat que se'ls pot donar a les lletres per part dels alumnes.

Els ítems es mostren distribuïts de forma ordenada segons la classificació que estableix Küchemann (1981) sobre les diferents interpretacions i usos de les lletres, de la qual se'n parla a l'apartat 2.3 del present treball. Cal recordar que aquesta està ordenada de forma ascendent, segons el nivell d'enteniment i abstracció exigida. A més, hem classificat els ítems segons la interpretació mínima que es requereix per a poder completar-los amb èxit.

Aquest anàlisi ens servirà, posteriorment, per classificar els alumnes per grups i estudiar alguns cassos amb més deteniment. Cal recordar que a l'apartat 1.2 de l'annex A es pot trobar una taula amb els ítems classificats per nivells i tipus d'interpretació mínima requerida.

Passem, doncs, a analitzar les interpretacions que en fan els alumnes de cadascun dels ítems que es porten a anàlisi.

LLETRA AVALUADA

Als enunciats de les preguntes que es troben en aquest grup ens demanen que diguem tot el que sapiguem sobre les lletres que apareixen en una o diverses equacions. Cal

notar que, segons el nombre d'equacions i de lletres, el nivell de dificultat de la pregunta serà major o menor.

Pregunta 15. a) i b)

L'apartat a) d'aquesta qüestió no requereix ni tan sols operar amb la lletra com a nombre específic, es pot resoldre simplement donant valors a la a i comprovant quan es compleix la igualtat entre ambdós costats.

Es tracta d'una pregunta la qual responen correctament la majoria dels alumnes, tot i que potser alguns d'ells no la resolen avaluant la lletra, sinó comptant els nombres que van des de 5 fins a 8 per tal de determinar el valor de a o, simplement, resolent la equació emprant el mètode de resolució habitual per a equacions d'aquest tipus.

A més, cal destacar que un dels factors que pot ocasionar dificultats quan s'avalua la lletra, sobretot en els primers cursos d'introducció a l'àlgebra, és interpretar el signe igual com es feia en aritmètica. Aleshores s'usava amb el significat de *tasca que hi ha que realitzar* i no com a funció de simetria entre ambdós costats com és el cas i, per això, als alumnes els costa veure que el resultat no siga el que hi ha a la dreta del signe igual, sinó un dels sumands. D'aquest fet en parla Freudenthal (2001).

A l'apartat b) ocorre el mateix, és suficient donar valors a b i veure quan apareix el mateix resultat als dos costats de l'igual per tal de respondre correctament.

Pregunta 14. a) i b)

En aquesta pregunta també es suficient avaluar la lletra per poder donar la resposta correcta. És clar que podria interpretar-se com a incògnita específica o atribuir-li qualsevol altre significat més elaborat i complex, però no és necessari. És per això que la qüestió s'inclou en el nivell 2 definit per Küchemann (1981).

Tanmateix, presenta més dificultats en els alumnes que l'anterior, potser perquè ara el nombre d'equacions i incògnites augmenta en un (tant en l'apartat a) com en el b)) respecte l'ítem anterior.

És evident que els dos apartats d'aquesta activitat poden resoldre's avaluant les lletres en les dues equacions, és a dir, agafant valors i provant per a d'ells es dona la igualtat. Tot i això, aquest és un mètode que pot arribar a ser costós i inclús poc exitós (en cas de no trobar el valor que es busca), encara que probablement sí el més fàcil per a alumnes que encara no posseeixen o no tenen ben assentades algunes de les nocions bàsiques i necessàries per resoldre equacions.

Un altre mètode de resolució consisteix en reduir el problema a una sola equació amb una incògnita (emprant la lletra com a objecte i substituint), de manera que així les dificultats de les quals parlàvem abans desapareixen i només cal operar o avaluar la lletra en l'altra equació. El principal problema d'aquest mètode és que no tots els alumnes aconsegueixen interpretar i emprar la lletra com a objecte.

Ací persisteix el problema de no interpretar com cal el signe igual i per això alguns alumnes no responen amb èxit la pregunta, fet que es pot constatar també en les transcripcions de les entrevistes.

Pregunta 9

Aquest ítem presenta una estructura diferent a les de la resta d'ítems del test ja que demanen que trobem quin nombre dels que es mostren és el major i quin el més menut.

Pel que s'ha pogut constatar a les entrevistes, els tres alumnes analitzats l'han resolt ignorant les lletres però seria suficient donar-li un valor concret a n per trobar quina de les expressions és major i quina més xicoteta. Com veurem posteriorment, aquests alumnes simplement fixen l'atenció en els nombres que acompanyen la lletra per respondre, cosa que no sempre els permet donar una resposta correcta. Això és el que passa quan se'ls pregunta si $n+4$ és major que $x-7$, al que responen de forma afirmativa.

Tal vegada, per poder determinar millor quina atribució de significat fan els alumnes de n , hauríem d'haver o bé modificat la pregunta per incloure distintes lletres, o bé demanat que especifiquen perquè han triat cada resposta ja que açò ens hauria permés afinar més en l'estudi de les interpretacions que realitzen.

LLETRA IGNORADA

Vegem, tot seguit, quines preguntes es poden resoldre correctament ignorant la lletra:

Pregunta 13. a) i b)

Aquesta qüestió consta de tres apartats amb estructura similar però, com ja hem pogut advertir a l'apartat de dificultats i errors, amb complexitat ascendent. En els dos primers, com es comenta a continuació, es requereix, com a mínim, ignorar les lletres per poder resoldre'ls amb èxit.

En l'apartat a), que aparentment pareix difícil de resoldre ja què apareixen dues incògnites, ha resultat bastant fàcil per a la majoria d'alumnes. Küchemann (1981) el

classifica com de nivell 1 ja que és possible resoldre'l ignorant les lletres: tan sols cal centrar l'atenció en el $+2$ i afegir-li'l a 43.

El mateix passa en l'apartat b), en el qual la lletra pot ser ignorada de la mateixa manera que abans, transformant les dues equacions en una sola. Els alumnes que ignoren la lletra resolen l'exercici afegint 1 a 762, degut que 247 és major que 246 i dista una unitat d'ell. A més, atenent a les estadístiques, podem dir que aquesta pregunta presenta més dificultats que l'anterior, potser perquè hi ha un signe menys o, també, perquè els nombres que apareixen són nombres grans (factor que influeix negativament a l'hora de resoldre l'ítem i que, freqüentment, provoca grans dificultats en l'àrea d'aritmètica).

Cal dir que també hi ha estudiants que empren la lletra com a objecte, com a mínim. És el cas de l'alumna 28, ja que al seu test es pot observar com resol l'equació (al marge del full) per tal de trobar el valor de n .

Pregunta 8. a2)

Aquest exercici requereix sumar 4 a una expressió i agrupar-la el màxim possible. Com que la expressió és $n+5$, tan sols hi ha que sumar el 4 al 5, cosa que permet resoldre la pregunta ignorant la lletra. També és possible interpretar la lletra com a incògnita específica però açò es dona en alumnes que presenten un enteniment de les lletres més avançat.

Posteriorment, veurem com no és possible resoldre correctament l'apartat següent (8a3) amb aquest tipus d'interpretació, sinó que en requereix una de més avançada.

LLETRA COM A OBJECTE

Alguns dels ítems que requereixen que s'interpreten les lletres com a objectes són:

Pregunta 12. a) i d)

Alguns dels ítems d'aquesta pregunta contenen lletres que es poden interpretar com a objectes, és el cas dels apartats a), b), c) i d). Analitzem-ne algun d'ells a continuació.

Al primer apartat és suficient emprar les lletres com a objectes, sense atribuir-los cap significat específic. A més, aquest ítem està inclòs al nivell 1 ja que és d'estructura simple i, per tant, de fàcil resolució per a la majoria d'alumnes.

A d) també és bàsic interpretar la lletra com a objecte per tal de resoldre'l correctament.

Küchemann (1981) explica que si s'atribueix un significat d'objecte a les lletres, és més fàcil per als alumnes interpretar-les. Per exemple, si $2a+5b+a$ es veu com 2 *pomes*, 5 *peres* i 1 *poma*, és fàcil deduir que el que tenim són 3 *pomes* i 5 *peres*. Aquest fet també es pot observar a les entrevistes realitzades, en les quals s'observa que alguns dels alumnes que donen respostes errònies són capaços de rectificar després d'explicar-los que es pot donar a les lletres algun significat semblant a aquest.

Pregunta 19. c)

Com ja hem dit, un context on s'utilitzen molt els termes literals com a objectes és en el càlcul d'àrees i perímetres. En particular, en el nostre test podem observar que per a resoldre aquest ítem, com a mínim, hi ha que fer aquest tipus d'interpretació de les lletres, és a dir, veure-les com a mesures i així poder calcular l'àrea de la figura.

Pregunta 21 a), b) i c)

Aquesta pregunta està formada per quatre apartats de dificultat ascendent en els quals ens demanen calcular el perímetre d'unes determinades figures.

En els apartats a) i c) apareix una única lletra, l'única diferència és que en l'apartat c) també hi ha nombres; fet que, com ja s'ha comentat, fa que augmenti la dificultat. D'altra banda, a l'ítem b) no apareix cap nombre però sí dues lletres distintes. Tot i que pareix estrany, les estadístiques mostren que l'apartat c) (tot i estar format per una única lletra) presenta majors dificultats en els alumnes que el b) que aparentment deuria ocasionar-ne més perquè apareixen dues lletres distintes.

No obstant això, els tres apartats requereixen, com a mínim, interpretar els termes literals com a objectes per a ser resolts amb èxit.

Küchemann (1981) assegura, com ja hem comentat en diverses ocasions, que usar la lletra com a objecte equival a reduir el significat abstracte d'aquesta a alguna cosa molt més concreta i real. Observant les respostes dels alumnes, podem afirmar que açò ha permès a molts xiquets respondre determinats ítems amb èxit, cosa que no haguera ocorregut si hagueren emprat el significat abstracte de la lletra, és a dir, si l'hagueren identificat com a incògnita.

Tot i això, emprar la lletra com a objecte s'usa moltes vegades en contextos no adequats, normalment quan apareixen elements que involucren objectes reals (com ara llapis, salaris, hores, etc), però en els quals és necessari distingir entre els objectes mateixos i el nombre o quantitat que hi ha de cadascun d'ells. Aquesta distinció pot ser, de vegades, molt difícil d'entendre per als alumnes. Un exemple clar és la pregunta 28, que analitzarem tot seguit, en la qual cal identificar la lletra com a incògnita específica.

LLETRA COM A INCÒGNITA ESPECÍFICA

Interpretar la lletra com a incògnita específica suposa una major aproximació quant a la comprensió del significat d'incògnita en sí mateixa. És per això que els ítems que analitzarem a continuació es troben en els nivells 3 i 4 que estableix Küchemann (1981) i requereixen un major grau d'interpretació per poder ser resolts amb èxit. Aquests ítems són els següents:

Pregunta 8. a3) i 8. b2)

Com ja hem comentat a l'apartat de dificultats i errors, ha resultat una mica sorprenent que l'ítem 8a3 resultara tan complicat per als alumnes ja que la seua estructura és prou simple i per a respondre-la és suficient escriure el 4 sumat a $3n$. Com diu Küchemann (1981), potser siga conseqüència d'aquesta simplicitat el que provoqe que donar la resposta $4+3n$ resulte insatisfactori entre els alumnes i, per tant, es produïsquen tants errors en les seues respostes. Però així i tot, fins que aquests no veuen n com a incògnita específica, no són capaços de reconèixer que no es pot fer res més per combinar els elements.

L'apartat 8b2, a l'igual que l'anterior, presenta grans dificultats en els alumnes, tot i que en aquest cas la estructura de l'ítem és més complexa ja que l'operació de multiplicar per 4 s'ha d'aplicar conscientment als dos membres de la expressió $n+5$. És per això que, a diferència del 8a3, aquest apartat s'inclou en el nivell 3.

Cal destacar que les respostes dels alumnes són de distints tipus. Un dels errors més freqüents ha sigut donar la resposta $n+20$, en la qual els alumnes ignoren la lletra. És evident que per a respondre correctament la pregunta és necessari interpretar la lletra, com a mínim, com a incògnita específica ja que és necessari veure que el 4 afecta a la totalitat de la expressió, $4n+20$.

També hi ha alumnes que no utilitzen una notació adequada i responen de forma incorrecta. És en el cas de respostes com ara $4 \times n+5$, que mostra que els alumnes no entenen el significat del parèntesi o no reconeixen la seua necessitat. Kieran (1979), citada per Küchemann (1981), apunta que aquest error és molt freqüent entre els alumnes dels primers cursos.

Pregunta 12. h) i e)

Els apartats h) i e) de la pregunta 12 requereixen interpretar la lletra com a incògnita específica per poder ser resolts amb èxit. Ara ja no es poden interpretar com a objectes ja que les expressions careixerien de significat.

L'apartat h) es considera de nivell 3 ja que és més complicat que els que hem analitzat abans (12a i 12d) i, com hem dit, no té sentit interpretar a i b com *pomes* i *peres* ja que apareix un terme que és $-b$ i mancaria de significat real.

D'altra banda, l'apartat e) és el que presenta una estructura més complicada ja que, a banda d'un signe menys, també apareixen parèntesis. Com abans, el signe menys dificulta que es puguin interpretar les lletres com a objectes reals, però a més, els parèntesis suposen un focus d'atenció que provoca que els alumnes pensin que el que hi ha al seu dintre no es pot simplificar amb el de fora, malgrat que en realitat es tracta d'un distractor. És per això que augmenten les dificultats respecte dels ítems anteriors i, conseqüentment, el nombre d'errades. Per tant, l'ítem és clarament de nivell 4 i requereix per a la seua correcta resolució interpretar les lletres com a incògnites específiques.

Pregunta 13. c)

A diferència dels dos apartats anteriors (13a i 13b), aquest s'inclou al nivell tres ja que presenta una major complexitat, tot i que té una estructura similar a la de l'apartat a). A més, per poder respondre'l correctament cal interpretar les lletres com a incògnites específiques. Açò és degut que, tot i que e i f poden ser ignorades si substituïm el valor de la equació $e+f=8$ en la expressió, falta operar amb la g , que no es pot ignorar per donar la resposta correcta.

Cal recordar que, potser degut a la reticència per part dels alumnes a acceptar que el resultat siga la suma d'una lletra i un nombre (de la qual parla Collis, 1975, citat en Kieran i Filloy, 1989), hi ha alumnes que tendeixen a avaluar g per obtindre un resultat numèric com ha respost, fet que els condueix a error.

Pregunta 16

Aparentment aquesta pregunta pareix que puga resoldre's emprant les lletres com a objectes o resoldre's ignorant-les però si ens fixem amb més detall ens adonarem que no és possible. Açò és degut que, tot i que per resoldre-la es pot substituir $s+t$ per r en la segona equació, seguidament hi ha que manipular amb la lletra per trobar la solució, per tant s'ha d'interpretar r com a incògnita específica.

Però, si no es té experiència amb aquest tipus de tasques de substitució, pot resultar complicat o es poden obtindre resultats incorrectes. És per això que apareixen respostes com ara $r=10$, $s=10$ i $t=10$ de l'alumne 24 o $r=16+14$ de l'alumne 16 (que considera $s=16$ i $t=14$) en les quals s'observa que s'ha avaluat r en una de les dues equacions per intentar donar una resposta correcta.

Pregunta 19. d)

Aquest es considera un ítem de nivell quatre ja que requereix identificar la lletra com a incògnita específica i té una estructura complexa. Tot açò és degut que cal reconèixer la lletra com a part de la mesura d'un dels costats de la figura i, per tant, requereix l'ús

de parèntesis per a escriure la seua àrea (ja que el producte haurà d'afectar a tota la mesura del costat, i no a una part d'ella).

Com comenta Freudenthal (1981), un fet molt habitual entre alumnes de secundària és precisament la manca d'ús de parèntesis ja que no reconeixen la necessitat d'emprar-ne per tal d'estructurar les expressions. Altres respostes on es pot observar aquest fet són la de l'alumna 19, que respon $6 \cdot P + 2$ en la pregunta 11 o la de l'alumne 10 que senyala com a correcta l'opció $e + 2 \cdot 3$ en la pregunta 5 (en compte de $(e + 2) \cdot 3$).

A més, cal destacar que d'observar directament les respostes no es pot deduir si la dificultat per respondre correctament ha estat el no saber interpretar la lletra com cal o per la falta de necessitat d'usar els parèntesis per a donar-li la estructura adequada.

Pregunta 21. d)

La estructura d'aquest ítem és més complexa que la de la resta d'apartats d'aquesta pregunta ja que ara el que desconeguem és el nombre de costats de la figura i no la mesura, com en els casos anteriors. A més, ara no és suficient identificar les lletres com a objectes per a respondre correctament sinó que hi ha que atribuir-los un significat específic. Per tant, hem de considerar la lletra com a incògnita específica.

Pregunta 22. b)

L'objectiu d'aquest ítem és calcular el nombre de diagonals que té una figura amb k costats restant 3 al nombre de costats. Aquesta pregunta és una extensió de l'apartat a) que és un ítem de tipus numèric i la seua estructura és similar a la de la pregunta 8.a3). Ara bé, les dificultats sorgeixen a l'usar la lletra com a objecte ja que apareixen respostes com $3 - k$ o $k - 2$, en les quals els alumnes no han sabut interpretar l'enunciat i/o donar-li el significat adequat a k . Per tant és necessari, com a mínim, interpretar la lletra com a incògnita específica

Pregunta 25. a)

La finalitat d'aquesta pregunta és escriure una equació que relacione el sou total de Maria amb les hores extres treballades. Cal dir que es tracta d'una pregunta amb un grau elevat de dificultat per als alumnes ja que cal donar-li significat a les lletres per poder respondre. A més, l'objectiu és trobar una equació, no una expressió algebraica i, com dèiem abans, alguns d'ells no interpreten correctament el significat del signe igual o presenten dificultats. A més, apareixen dues lletres, fet que la complica més encara.

Cal dir que aquesta pregunta requereix donar-li un significat particular, específic als termes literals per tal d'operar amb ells i construir l'equació que es demana.

Pregunta 26

En aquest ítem, el que ens demanen és interpretar la expressió $4p+3c$ on p és el preu de cada pastís i c el de cada coca. Cal dir que ha sigut una pregunta que ha produït moltes dificultats entre els alumnes ja que, com ja s'ha dit, es té tendència a interpretar la expressió com *s'han comprat 4 pastissos i 3 coques*, conseqüència de llegir $4p+3c$ literalment i d'usar les lletres com a objectes. És per això que en aquest ítem es veu clarament que els termes literals s'han d'interpretar, com a mínim, com a incògnites específiques, sinó no és possible resoldre'l amb èxit.

Pregunta 27

Aquesta pregunta presenta una estructura complicada i per a resoldre-la és necessari donar-se compte que el conjunt de valor o valors que pot prendre x també pot ser representat per $3x$. És per això que molts alumnes argumenten que *com x val 6 en la primera equació, per a que $3x$ valga 6, x haurà de valdre 2*.

Aleshores, cal interpretar la lletra, com a mínim, com a incògnita específica. No obstant això, com que el que fan en realitat els alumnes és aplicar el canvi de variable $y = 3x$ (d'on s'obté que si y val 6, x serà 2) també pot ser que la interpreten com a nombre generalitzat o, inclús, com a variable. De fet, Küchemann (1981) comenta que per resoldre aquesta pregunta és necessari tindre en compte que un valor o conjunt de valors x pot ser igualment representat per una expressió com $3x$ i que, conseqüentment, açò es tradueix en la transformació que condueix a dividir entre 3 el valor o valors que puga prendre aquesta.

Per tant, aquells que resolen amb èxit l'apartat estan interpretant la lletra com a mínim com a incògnita específica ja que és necessari donar-li un significat a aquesta per poder resoldre'l.

Pregunta 28

Aquesta és una pregunta en context real en la qual es demana especificar la relació entre b i r , on b representa el nombre de llapis blaus i r el nombre de llapis rojos, i 90 és el preu total en cèntims. Ens trobem en la situació de la qual parlàvem abans, en què les lletres representen el nombre d'objectes d'un determinat tipus, no el tipus d'objecte en sí. Aquest fet condueix a l'error de respondre $b+r=90$; com ja hem vist abans, resultat de considerar les lletres com a objectes.

Per tant, per a respondre correctament aquesta pregunta cal, com a mínim, conèixer el significat concret de les lletres, és a dir, cal identificar-les com a incògnites específiques. Cal destacar que els alumnes que donen com a resposta la relació $5b+6r=90$, no necessàriament estan interpretant les lletres com a variables, sinó que poden estar interpretant-les com a incògnites específiques però donen la relació que hi ha entre elles. A més, com ja hem dit abans, també es poden veure les lletres com a

nombres generalitzats si s'interpreta que l'equació pot tindre més d'un parell de valors que la verifiquen o si, directament, es donen aquestos valors (que són (6, 10), (12, 5), (0, 15) o (18,0)).

LLETRA COM A NOMBRE GENERALITZAT

Els ítems en què cal interpretar la lletra com a nombre generalitzat són els següents:

Pregunta 17

Notem que la principal diferència amb les preguntes anteriors és que en aquesta es mostra la necessitat de considerar que els termes literals poden prendre diversos valors, és a dir, que les lletres c i d s'han de considerar com a nombres generalitzats.

A més, aquest fet fa que la dificultat d'aquest ítem augmente considerablement comparant-la amb els ítems en què calia, com a mínim, identificar la lletra com a incògnita específica.

Com ja hem explicat a l'apartat anterior, hi ha alumnes que responen donant més d'un parell de valors que compleixen l'equació, pel que es pot deduir que interpreten els termes literals com a nombres generalitzats. A més, tot i que alguns alumnes donen sols un únic valor, durant les entrevistes realitzades es va poder constatar que alguns d'ells són capaços d'interpretar-les com a nombres generalitzats ja que es mostren disposats a trobar altres valors quan són preguntats.

Notem, a més, que aquest ítem també podria resoldre's emprant la lletra com a variable però açò fa molt més complicat l'exercici. De fet, no hi ha cap alumne capaç de fer-ho en la mostra estudiada ja que cap d'ells ha contestat $c > 5$ a la pregunta. Si fos així, haguérem considerat que interpretava les lletres com a variables ja que en la relació van implícites totes les opcions possibles, és a dir, a partir d'ella podem trobar tots els valors que pot prendre c .

Pregunta 23. b)

En aquesta pregunta es pretén saber si la igualtat $L+M+N=L+P+N$ és certa sempre, mai o de vegades, la qual presenta dificultats si no s'interpreten les lletres com cal. Aleshores, la principal finalitat d'aquesta, a l'igual que passava en l'anterior, és detectar si els alumnes són capaços de veure que depenent del valor que prenguen les lletres es donarà o no la igualtat, és a dir, d'interpretar les lletres com a nombres generalitzats.

Tanmateix, com es pot observar a les entrevistes, aquest ítem presenta una dificultat afegida. Alguns alumnes són capaços de veure M i P com a nombres generalitzats, però no veuen clarament que puguin prendre els mateixos valors ja que es tracta de lletres distintes

Per tant, notem que quan apareixen relacions d'ordre les lletres poden prendre (generalment, a no ser que estiguen completament determinades) més d'un valor concret i, per tant, cal interpretar-les com a nombres generalitzats.

LLETRA COM A VARIABLE

L'únic ítem en què s'ha d'interpretar la lletra com a variable per poder ser resolt és el següent:

Pregunta 10

Com ja hem dit en l'apartat 2.3, aquest ítem es va crear precisament per a detectar si hi havia algun alumne que era capaç d'identificar els termes literals com a variables. En particular, segons Küchemann (1981), l'objectiu de la pregunta és veure si els xiquets són capaços de reconèixer que el tamany de les expressions $2n$ i $n+2$ depén del valor de n .

Ja hem comentat quan analitzàvem les dificultats dels alumnes que molts d'ells es limiten a respondre que $2n$ és major que $n+2$ perquè està multiplicat (com és el cas de l'alumne 5), per tant s'està emprant la lletra com a objecte. Però, si per a respondre han substituït n per algun valor és perquè l'han interpretat com a incògnita específica o nombre generalitzat, fet que no permet respondre correctament.

Cal dir que hi ha hagut alguns alumnes que, tot i que no han arribat a interpretar la lletra com a variable, sí que han sigut capaços de donar un raonament més elaborat que el de la resta. Analitzem alguna d'aquestes respostes amb més deteniment. Per exemple, l'alumna 11 que diu que *normalment seria més gran $2n$ però depén de què val n . Si n val 0 o 1, $n+2$ seria més gran, sinó $2n$ és la més gran*. O l'alumna 7 que diu que *en general $2n$ és més gran, però que hi ha casos en què dóna el mateix*, sense especificar en quins. Per tant, mostren un raonament més avançat i una interpretació de la lletra, tal vegada, com a nombre generalitzat, però encara no suficient per a considerar que estan interpretant n com a variable.

6. ANÀLISIS DELS CASOS

Tot seguit estudiarem la mostra d'estudiants, classificant-los en quatre grups distints segons les seues respostes. Per a establir dits grups s'han tingut en compte tant el tipus d'interpretació i ús dels termes literals que fan els alumnes com les preguntes que han sigut capaços de respondre segons la complexitat estructural de cadascuna d'aquestes.

Notem que l'establiment d'aquesta classificació no implica que tots els alumnes d'un mateix grup hagen resolt de la mateixa manera cada ítem, ni tan sols que hagen resolt els mateixos correctament ni la mateixa quantitat. Simplement que presenten característiques en comú que ens permeten considerar-los com a grup.

D'altra banda, tot i que és evident, cal afegir que aquesta classificació no és completament exhaustiva ja que no s'han pogut entrevistar tots els alumnes per a determinar com pensaren cada ítem i perquè donaren cada resposta.

A més, també hi ha que dir que apareixen casos d'alumnes que fan usos distints de les lletres en situacions similars, tot i que són casos molt puntuals i a grans trets compleixen les característiques generals del grup en el qual s'han inclòs.

Per a establir els grups, a l'igual que va fer Küchemann (1981), no hem considerat tots els ítems ja que alguns d'ells aporten informació redundant i aquest fet complicaria l'anàlisi i l'establiment de conclusions.

Aleshores, els grups que hem considerat són els següents:

CAS ESPECIAL

Aquest cas està format per un únic alumne, l'alumne 27. Es tracta d'un cas especial ja que, com hem pogut observar en l'anàlisi de les dificultats i dels errors, no és capaç ni tan sols de resoldre alguns ítems de tipus numèric. A més, no podem incloure'l al grup A ja que les interpretacions que fa dels termes literals disten molt de les dels alumnes d'aquest grup.

Vegem alguns exemples de les seues respostes:

- Als tres apartats de la pregunta 8.a) respon 32, possiblement resultat d'haver multiplicat 8 per 4. El mateix fa als tres apartats de 8.b) on respon 34. Sembla que no interpreta correctament l'enunciat, tot i que les ordres són clares: *Suma 4 en cada cas* i *Multipliqua per 4 en cada cas*.
- No resol de forma correcta ítems que es poden respondre fàcilment ignorant la lletra, com ara el 13.a) i el 13.b), els quals contesta 7 i 11 respectivament.

- Tampoc no és capaç de resoldre correctament 14.b) i 15.a), tot i que són ítems d'estructura simple i que requereixen simplement l'avaluació de la lletra.

A més, respon els ítems 15, 16, 17, 18, 25, 26, 27 i 28 amb frases com *res*, *no m'ho sé*, *no sé fer-ho...*

Pel que es pot observar després d'analitzar el test d'aquest alumne amb més deteniment és que no sap respondre qüestions en què apareixen lletres. A més, té tendència a respondre sempre donant resultats totalment numèrics, pel que sembla que no concep respostes en les qual apareixen termes literals.

GRUP A

Aquest grup està format per huit alumnes: 4, 10, 13, 16, 22, 23, 24, 25 i 26. Aquests resolen la majoria d'ítems de tipus numèric i aquells en què cal interpretar els termes literals com a objectes (en ítems d'estructura simple), avaluar-los o simplement ignorar-los. És per això que resolen correctament els ítems: 8a1, 8b1, 12a, 13a, 15a, 19a, 19b, 20, 21a i 22a.

A més, aquests alumnes no són capaços encara d'interpretar les lletres com a incògnites específiques i per això tendeixen a emprar-les com a objectes o ignorar-les en la majoria dels casos en que es requereix altra interpretació més abstracta.

Alguns punts que caracteritzen els alumnes d'aquest grup són:

- Resolen correctament ítems de tipus totalment numèric com són 8a1 i 8b2, però en canvi no són capaços de resoldre 8a2, 8a3, 8b2 i 8b3 en els quals ens demanen el mateix (que sumem 4 i que multipliquem per 4) però es requereix, com a mínim, usar la lletra com a objecte i la seua estructura és un poc més complicada (perquè es requereix l'ús de parèntesi en alguns dels casos o l'acceptació de la falta de clausura, que es dona en nivells posteriors).
- El mateix passa amb el 12a, en el qual també s'ha d'emprar la lletra com a objecte. Aquest el resolen correctament, però no el 12b i el 12c que requereixen el mateix tipus d'interpretació; potser perquè presenten una estructura més complexa.
- També són capaços de contestar perfectament la pregunta 13a ja que es pot resoldre ignorant les lletres. En canvi, la majoria d'alumnes no sap resoldre o no resol correctament la 13c que és d'estructura similar però requereix una interpretació més avançada de les lletres. A més, ara la resposta correcta no és numèrica ja que apareix la lletra *g* en la solució, pel que alguns alumnes responen que el resultat no es pot determinar.

- La majoria d'ells resolen amb èxit els ítems 19a i 19b que són totalment numèrics, llevat de en casos en què l'alumne no recorda la fórmula de l'àrea del rectangle. A més, molts dels que resolen correctament aquestos resolen amb èxit el 19c interpretant els termes literals com a objectes. Cal dir que 19c és un ítem d'un nivell superior als altres (ja que en ell es fa ús de dos termes literals) però, tot i que alguns alumnes són capaços de resoldre'l, no es pot considerar significatiu per a incloure els alumnes en el grup B.
- Quant a l'ítem 21a, cal dir que és resolt per tots els alumnes del grup, llevat de l'alumna 13, que respon e^3 . No podem dir el mateix de l'ítem 21b, en el qual es produeixen nombroses errades per part dels alumnes d'aquest grup ja que es tracta d'un ítem en el qual intervenen dues lletres i, per tant, és de major dificultat. A més, els alumnes encara no accepten la falta de clausura, desenvolupada per Collis (1975), ja que donen respostes del tipus $5ht$, en compte de $4h+t$.
- La majoria d'alumnes són capaços de resoldre correctament l'ítem 12a ja que posseeix una estructura simple i requereix interpretar, com a mínim, la lletra com a objecte. Al contrari passa en l'exercici 12d (d'un nivell superior) que és resolt sols per alguns dels alumnes, la resta d'ells encara no és capaç de fer-ho, probablement perquè apareixen dues lletres, fet que augmenta la dificultat.

GRUP B

A aquest grup pertanyen els alumnes 3, 15, 17, 18, 19, 21 i 29 que són capaços d'interpretar, com a màxim, les lletres com a objectes, però inclús quan l'estructura de l'ítem és complicada, cosa que abans no passava. La principal diferència respecte a l'anterior grup és l'acceptació de la falta de clausura, fet que es pot observar en les seues respostes. Tanmateix, els alumnes deixen en blanc els ítems que requereixen una interpretació més abstracta, com ara la de lletres com a incògnites específiques. En resum, aquestos alumnes són capaços de resoldre amb èxit ítems com ara 8a2, 8a3, 8b3, 12d, 14a, 14b, 19c i 21b.

Vegem, en general, quines són les seues respostes i quin ús fan de les lletres:

- Notem que els alumnes responen correctament preguntes com 8a2 i 8b3 que posseeixen una estructura una mica més complexa que 8a1 i 8b1 ja que contenen termes literals. A més, es pot observar que els alumnes responen $3n+4$ a la pregunta 8a3, acceptant la falta de clausura.

- Quant a la pregunta 12, els alumnes ja responen bé l'apartat d i inclús algun d'ells respon correctament h, en el qual apareixen signes negatius, però no es tracta d'un resultat significatiu. No podem dir el mateix dels apartats b i g, que no són capaços de resoldre ja que tenen una estructura que provoca majors dificultats.
- Els alumnes d'aquest grup resolen també els ítems 14a i 14b, cosa que no feien la majoria dels alumnes del grup A. Aquests ítems exigeixen, com a mínim, avaluar la lletra però s'inclouen en els ítems de nivell 2 ja que són més complexos. Açò és perquè, en ambdós casos, apareixen dues lletres i dues equacions distintes que cal combinar per poder respondre correctament.
- Ara els alumnes ja responen bé l'ítem 19c en què apareixen dues lletres i cal interpretar-les com a objectes. A més, el nombre d'errors conceptuals degut a l'ús de la fórmula de l'àrea també disminueix bruscament. L'apartat d requereix una interpretació de la lletra més abstracta i per això no el resolen bé la majoria d'ells.
- Per últim, podem veure que molts dels alumnes del grup responen els ítems 21b i 21c correctament. A més, és pot observar en les seues respostes l'acceptació de la falta de clausura, és a dir, aquests no agrupen tots els termes per a respondre amb un monomi (com era el cas dels alumnes del grup anterior) sinó que responen $4h+t$ i $2u+16$ (o equivalents) respectivament.

GRUP C

El grup C el formen els alumnes: 1, 6, 7, 8, 11, 14, 20 i 28. Aquests mostren una capacitat d'interpretació de les lletres superior a la dels alumnes que es troben en els grups anteriors ja que són capaços d'atribuir-los el significat d'incògnites específiques. Els ítems que hem analitzat per a determinar la classificació dels alumnes en aquest grup són 12b, 12g, 13c, 16 i 21d.

Passem a detallar les característiques pròpies dels alumnes que es troben en aquest nivell:

- Els alumnes d'aquest grup ja responen correctament els ítems 12b i 12g, tot i que no són capaços de resoldre el 12e ni tampoc el 12f ja que, tot i que requereixen la interpretació de la lletra com a incògnita específica, tenen una estructura complicada, fet que fa que augmenten les dificultats que presenten els alumnes.

- També aconseguixen resoldre els ítems 13c i 16 que requereixen interpretar els termes literals com a incògnites específiques. Cal recordar que aquests són exercicis que provocaven moltes dificultats en els alumnes dels grups A i B ja que hi ha que substituir en una equació la suma de dues lletres per un valor (numèric en el cas de 13c i no numèric en el cas de 16). A més, el resultat de 13 és la suma d'un nombre i una lletra, cosa que provocava moltes dificultats en els alumnes d'A.
- L'ítem 21d és resolt correctament per la majoria d'alumnes del grup. A més, els que no ho fan, donen respostes en les quals es pot identificar que estan usant les lletres com a incògnites específiques. És el cas de l'alumna 1, que respon $2^{14} \cdot n^2$ on pareix que compte els costats dibuixats de la figura (que hi ha 14) i ho multiplique per n^2 (nombre de costats per mesura de cadascun). Potser l'alumna escriu n^2 (que resulta estrany ja que habitualment escriuria $2n$) perquè en les respostes als apartats a, b i c de la mateixa pregunta escriu el nombre de costats davant i la mesura darrere.

GRUP D

En aquest últim grup, els alumnes mostren un grau d'interpretació de les incògnites major que la resta d'alumnes. Són capaços d'usar les lletres com a incògnites específiques en ítems amb qualsevol tipus d'estructura i diferents nivells de complexitat i, a més, són capaços d'interpretar-les com a nombres generalitzats. Els alumnes que hem inclòs en aquest grup són: 2, 5, 9 i 12. D'altra banda, els ítems que ens han permès determinar els alumnes que pertanyen a aquest grup són: 10, 12e, 12f, 19d, 23b, 26, 27 i 28.

Cal dir que, tot i que en alguns ítems els alumnes usen un raonament més avançat i interpreten les lletres com a variables, ho fan en casos puntuals i no en tots els ítems que ho requereixen. És per això que no podem afirmar que siguin capaços d'interpretar-les sempre així.

Vegem alguns casos en els quals apareix aquest raonament:

- En la pregunta 10 podem detectar que els alumnes d'aquest grup mostren una interpretació de la lletra més avançada que la resta dels seus companys. Donem alguns exemples de les seues respostes. Per exemple l'alumna 2 respon: *Depén del que valga n perquè si dóna 1 és més gran la suma i si és més d'1 és més gran la multiplicació*. Tot i que la seua resposta no és correcta (ja que quan $n=2$, $2n$ serà igual a $n+2$ i no major) mostra un raonament més avançat: ha considerat més casos. Per tant, podem dir que interpreta la lletra

com a nombre generalitzat. El mateix fa l'alumna 9 que respon que $2n$ és major perquè es multiplica, però pot haver casos en què done el mateix.

- Cal dir que l'alumna 9, al contrari que els seus companys, respon correctament la pregunta 26: $4p+3c$ és el total que has de pagar per 4 pastissos i 3 coques. Aquesta és capaç d'interpretar, com a mínim, les lletres com a incògnites específiques. Potser la resta d'alumnes les hagen interpretat com a objectes i per això responen que s'han comprat 4 pastissos i 3 coques (per confusió al llegir literalment $4p+3c$) o $4p$ significa que 4 pastissos valen p i que 3 coques valen c .
- A més, els alumnes 5, 9 i 11 responen correctament la pregunta 27 i ho fan amb un raonament diferent a la resta (que responen avaluant les lletres i comprovant quan es compleix la igualtat). Aquests fan una interpretació del terme literal més abstracta, per exemple, l'alumne 5 respon $x=2$ ja que si x es multiplica per 3 haurà de donar 6 com en l'apartat a), aleshores en b) x serà la tercera part, resposta en què s'observa el raonament que es fa en un canvi de variable.
- Per últim, tots els alumnes responen l'ítem 28 donant com a resposta la relació $5b+6r=90$. Recordem que Küchemann (1981) identificava aquesta resposta amb una interpretació de les lletres, com a mínim, com a incògnites específiques, tot i que també podria ser que foren interpretades com a variables o nombres generalitzats. No obstant això, tampoc és clar a simple vista si els alumnes les identifiquen d'una manera o altra però açò podria determinar-se formulant les preguntes adequades si s'entrevistaren tots quatre alumnes personalment.

Aquesta classificació s'ha fet analitzant les respostes correctes de cada alumne, la interpretació dels termes literals i la capacitat o incapacitat de resoldre ítems d'un nivell o altre superior.

A l'annex es poden observar les taules que contenen els resultats obtinguts de respostes correctes, incompletes, incorrectes i en blanc per alumne.

Cal dir que, de vegades, ha sigut complicat establir una línia divisòria entre els distints grups ja que alguns d'ells presentaven característiques dels dos alhora. Per tal d'afinar més, hauríem de realitzar un anàlisi més exhaustiu i realitzar entrevistes personals a cadascun d'ells.

Notem com els grups no són homogenis, és a dir, no són comparables amb els percentatges d'alumnes per grup de Küchemann (1981), ja que nosaltres no hem analitzat una població sinó una mostra d'aquesta.

Cal destacar també que els alumnes que assisteixen a classe de taller de matemàtiques es troben, la majoria, en els grups A i B, llevat de l'alumne 27 que ja hem comentat que es tracta d'un cas especial, i l'alumna 28 que s'inclou al grup C.

A més, cal assenyalar que de la resta d'alumnes que pertanyen al grup A, dos d'ells assisteixen a un altre grup de taller de matemàtiques, així com els alumnes 3 i 15 que es troben al grup B. Cal destacar que l'alumna 28 de taller de matemàtiques mostra un ús de les lletres més evolucionat que els seus companys de classe. És per això que es va decidir entrevistar-la, com veurem tot seguit.

Cal dir que els quatre grups mostren una certa semblança amb els quatre nivells que estableix Küchemann (1981) en el seu treball d'investigació, tot i que no podem comparar-los ja que per a això hauríem de realitzar un estudi a fons i més complet.

7. ENTREVISTES

Com ja hem comentat abans, per a poder analitzar millor les respostes dels alumnes al test s'han realitzat una sèrie d'entrevistes a alguns d'ells. Açò ens ha permès, mitjançant les preguntes adients, determinar millor quines són les interpretacions que fan aquestos dels termes literals. Durant les entrevistes, es van gravar les conversacions per tal de transcriure-les i analitzar-les amb més deteniment. Amb l'ajuda d'aquestes, hem pogut apreciar errors que ni tan sols eren apreciables en el moment en que aquesta es va realitzar. Les transcripcions s'adjunten en l'apartat 2.1 de l'annex B i, de cadascun dels alumnes, s'especifica el sexe i la data de naixement. A més, denotem per E les intervencions de l'entrevistadora i per A les de l'alumne.

L'únic inconvenient que se'm va presentar a l'hora de portar a terme els meus propòsits per a la realització del present treball va ser que, per motius aliens a mi, vaig haver de realitzar les entrevistes entre els dies 30 de març i 2 d'abril, quasi quatre setmanes després des que s'emplenara el test. La principal causa d'açò va ser la manca de temps per part de la professora per a impartir el temari establert, fet que em va obligar a posposar les entrevistes fins la setmana cultural. És per això que, com es pot observar a les transcripcions, algunes de les respostes dels alumnes en les entrevistes es veuen afectades per aquest fet. A més, en certs casos aquestos són capaços, inclús, de corregir les seues pròpies respostes amb gran facilitat degut que han rebut les instruccions pertinents a classe.

Quant a l'elecció d'alumnes per a la posterior realització d'entrevistes es va tindre la possibilitat de triar-ne un màxim de 3. Es va decidir escollir-ne un que fora del grup A i un altre del grup D per a observar la diferència entre les interpretacions que fa cadascun d'ells dels termes literals. L'últim que es va escollir va ser l'alumna 28 (alumna pertanyent al grup C) ja que, com hem dit, ens va resultar rellevant que una alumna que assisteix a classe de taller fora capaç de realitzar tan abstractes interpretacions de les lletres. Per això vam decidir triar-la i així poder analitzar millor les seues respostes mitjançant una entrevista.

Haguera estat bé poder entrevistar a un representant del grup B per a tindre'n un de cada grup i estudiar la evolució de les distintes interpretacions conforme s'ascendeix d'un grup a un altre, però no va ser possible per falta de temps.

Per tant, vàrem escollir l'alumne 26 com a representant del grup A, l'alumna 28 del C i el 12 del grup D. Cal recordar que l'alumne 26 també pertany al grup de taller de matemàtiques i l'alumne 12 al de 3r d'ESO A. Les entrevistes duraren entre 50 i 55 minuts cadascuna, és a dir, pràcticament el mateix que dura una classe.

Tot seguit anem a comentar les conclusions que es poden extraure de cadascun dels alumnes entrevistats segons la interpretació que fan dels termes literals.

ALUMNE 26 (Representant del grup A)

Com era d'esperar, com a màxim aquest alumne és capaç d'interpretar la lletra com a objecte, i només en ítems d'estructura senzilla. Per això, no respon correctament exercicis com el 14a i el 14b (en els quals ignora les lletres) que tenen una estructura més bé complexa. A més, aquest alumne avalua les lletres en exercicis en què no és possible, per exemple en el 13c, en què respon que e , f i g han de valdre 4, i en el 4, que respon que nm significa $25+26$.

En la entrevista s'ha pogut observar que és capaç de resoldre per ell mateix alguns ítems de nivell 2, però no molt més enllà. Encara no és capaç d'interpretar la lletra com a incògnita específica ni molt menys com a nombre generalitzat.

Durant la entrevista també s'han pogut corregir errors com ara pensar que $2n=2+n$, o que $-b+b=-2b$, aplicar les fórmules dels productes notables quan no es pot... A més, s'ha pogut detectar que l'alumne mostra una certa carència de coneixements bàsics ja que, per exemple, no entén que una lletra pugui prendre valors negatius perquè diu que *no té signe* (pel que suposa que és positiva). Açò és el que passa a l'exercici 17, en el qual l'alumne considera que c pot valdre 1, 2, 3 i 4, però mai un nombre negatiu, fet que l'impedeix atribuir-li el significat adequat per poder resoldre la pregunta amb èxit.

A més, durant la entrevista se li expliquen els exercicis que no ha sabut resoldre, se li donen algunes indicacions per a que intente resoldre'ls per ell mateix en eixe moment i, si no és el cas, se li proporcionen el que podrien ser possibles respostes correctes. Cal destacar que quan se li expliquen els ítems 10 i 23b afirma que són molt complicats, fet que es explicable ja que es tracta d'ítems en els que cal interpretar la lletra com a nombre generalitzat o variable per tal de resoldre'ls correctament. A més, són ítems considerats per Küchemann (1981) de nivell 4.

D'altra banda, també se li demana a l'alumne que simplifique o desenvolupi algunes expressions que havia escrit sense acabar-les d'arreglar per tal de veure si és capaç de fer-ho o simplement les havia deixat així perquè no sabia continuar. Les expressions a les quals ens referim són $(n+5)+4$, a la qual respon $5n+4$, o $3(e+2)$, que desenvolupa amb èxit.

ALUMNA 28 (Representant del grup C)

Cal dir que, a l'hora d'establir els distints grups d'alumnes es va dubtar si incloure aquesta alumna en el grup C o en el B perquè presentava característiques d'ambdós grups. Al final es va optar per incloure-la en el primer ja que responia alguns ítems de nivell superior millor que la resta d'alumnes del grup B.

Durant la entrevista es va poder constatar que, efectivament, l'alumna presenta majors característiques del grup C ja que és capaç d'interpretar els termes literals com a incògnites específiques en els ítems que ho requereixen, cosa que no fan els companys del grup B.

Analitzem tot seguit algunes de les seues respostes al test i així com les reaccions observades durant la entrevista realitzada.

És capaç de resoldre la pregunta 17 durant la entrevista, cosa que no va fer quan se li va passar el test. Cal dir que açò podria ser degut que no aconseguia interpretar els termes literals com a nombres generalitzats en aquest ítem, i probablement, ni tan sols com a incògnites específiques ja que la seua resposta va ser que *c és menor que d*, que és part de l'enunciat.

Resol alguns ítems de nivell 3 en els quals cal interpretar la lletra com a incògnita específica i tenen una estructura més bé senzilla com són: 6, 13c, 21d i 24. Durant la entrevista és capaç de resoldre altres ítems de nivell 3 sense quasi indicacions, tanmateix afirma que els ítems 16 i 18 són molt difícils.

Pel que hem pogut observar, potser aquesta alumna es trobava en un estat de transició entre ambdós grups quan va realitzar el test ja que no presentava les característiques pròpies del grup C però responia correctament la majoria d'ítems en què fallen els alumnes del grup B.

ALUMNE 12 (Representant del grup D)

Es tracta d'un dels pocs alumnes que és capaç d'interpretar la lletra com a variable en alguns dels ítems que ho requereixen. A més, resol quasi tot el test correctament, llevat d'alguns errors que citarem tot seguit. Com es pot veure a la entrevista, presenta un raonament més elevat en eixe moment que quan va realitzar el test, tot i que no ha experimentat tanta millora com els alumnes 26 i 28. Potser aquests milloren el seu raonament més ja que anteriorment era prou pobre i amb unes poques instruccions específiques canvia molt la concepció i la interpretació que fan de les lletres. En canvi, pareix ser que quan un alumne interpreta prou bé lletres li costa més millorar.

L'alumne 12 és un bon estudiant que posseeix els coneixements bàsics necessaris per al nivell en què es troba. A més, és dels pocs que recorda com resoldre equacions i presenta notables destreses quant al raonament matemàtic (com es pot observar, per exemple, en la resposta que dona a la pregunta 27).

Cal destacar que en la pregunta 3 senyala com a correctes els apartats a), c) i e) i afegeix que els altres no sabem si ho són o no perquè no sabem què val la lletra e (si

per exemple la e fora 3, l'apartat d) $3+3+3$ també seria correcte). Aquest incís ens fa pensar que l'alumne està identificant la lletra com a incògnita específica, al contrari que els seus companys entrevistats que la interpretaven com a objecte.

Tot i que en l'ítem 4 senyala que nm pot ser 25×26 , durant la entrevista afegeix que no té perquè però podria ser-ho; pel que podem extraure que l'error en aquesta pregunta ha estat la comprensió de l'enunciat (en el qual ens demanen que indiquem el que significa la expressió, no què pot valdre) i no la interpretació de les lletres.

A més, respon correctament quasi totes les preguntes de nivell 3 i 4 llevat de la 10, la 17 i la 23b.

Respon malament la 10 ja que diu que $2n$ és major perquè 2 i n estan multiplicant-se. Però, a diferència dels altres alumnes entrevistats, és capaç de formular la resposta correcta per ell mateix quan se li donen unes poques indicacions (i, per tant, d'interpretar la lletra com a variable).

D'altra banda, en la pregunta 17 contesta $c=4$. Durant la entrevista se li pregunta perquè ha donat eixa resposta i especifica que també haguera pogut posar $c=3$, $c=2...$ i que no havia comprés bé l'enunciat de l'ítem. A l'igual que en altres, i mitjançant les preguntes adequades, és capaç d'arribar ràpidament a la conclusió de què la resposta correcta és $c < 5$.

En canvi, en 23b tria l'opció *ii. Mai*, que és incorrecta, considerant que $L+M+N=L+P+N$ mai són iguals. Tot i això, durant la entrevista comenta que en principi havia contestat *iii. De vegades*, quan $M=P$ però que després va dubtar i va canviar de resposta.

Per últim, pareix que en l'ítem 28 l'alumne interpreta les lletres com a variables ja que dóna com a resposta la relació entre elles i, a més, durant la entrevista es pot constatar que interpreta que les lletres poden prendre diversos valors i, depenent del que valga una, valdrà l'altra.

Per tant, podem afirmar que aquest alumne sí que és capaç d'interpretar les lletres com a variables, així com a incògnites específiques i nombres generalitzats.

Aleshores, com a conclusió de l'estudi, cal dir que ha sigut tot un èxit ja que, no només s'han pogut determinar els tipus d'interpretació de les lletres, sinó també modificar-les (en els cassos en què no eren correctes) i fer veure als alumnes altres formes d'interpretar-les per a que siguin capaços de resoldre exercicis d'aquest tipus més avant.

A més, és evident la evolució que han experimentat els alumnes des que es va passar el test fins que s'han realitzat les entrevistes, fet que es pot observar clarament en les seues respostes. Com a conclusió de les entrevistes realitzades, hem de destacar que en la majoria dels casos amb una correcta instrucció l'alumne és capaç de determinar les seues pròpies errades i millorar els tipus d'atribucions que es fan als termes literals.

Personalment, cal dir que haguera sigut interessant poder entrevistar a altres alumnes els quals donen respostes interessants però no s'ha pogut fer, com ja s'ha comentat, per falta de temps.

8. SUGGERIMENTS I CANVIS PER A FUTURES APLICACIONS

Tot seguit s'han inclòs una sèrie d'indicacions per tal de poder facilitar la extracció d'informació del test i assegurar la màxima comprensió dels enunciats dels ítems per part dels alumnes en futures aplicacions d'aquest. Es tracta d'una mena d'indicacions i propostes per tal de millorar l'aplicació que es va fer en aquest experiment i que pot servir de guia per a altres experiments posteriors. És evident que no es poden establir conclusions a nivell general, ja que per a això hauríem d'haver fet una anàlisi més profunda i a una major mostra d'alumnes.

Cal dir que per a la redacció d'aquest apartat s'han tingut en compte tant les dificultats presentades per part dels alumnes a l'hora de respondre els ítems (observades en classe el dia de la realització del test, en les respostes donades i durant les entrevistes) com les dificultats presentades durant la extracció de la informació de cada resposta.

Citem a continuació les indicacions i les propostes de modificació de què parlàvem:

- En els ítems 2, 3, 4 i 5, caldria especificar que \times és el signe de multiplicar i no la lletra *ics*, ja que durant la entrevista s'ha pogut constatar que era un error prou freqüent entre els alumnes. Probablement siga perquè aquests es troben en el tercer curs de la ESO i solen emprar habitualment el símbol \cdot per a la multiplicació en compte de \times (que s'empra en cursos inferiors). Una altra opció seria substituir aquest per \cdot però potser canviaria completament el sentit de la pregunta (ja que alguns alumnes, sobretot en el primers cursos de la ESO en els quals comencen a familiaritzar-se amb aquest signe, no coneixen el seu significat o li n'atribueixen un diferent a l'original).
- No estaria de més advertir als alumnes que potser hi haja més d'una opció correcta en les preguntes d'encerclar (2, 3, 4, 5 i 6) ja que molts d'ells es limiten a senyalar un únic apartat. A més, sembla que després de trobar una resposta que creuen correcta no continuen llegint la resta i passen a la següent pregunta. També pot ser degut que no interpreten les lletres com cal i per això no troben més significats.
- Una de les preguntes que va ocasionar majors dificultats de comprensió fou l'ítem 7, ja que la majoria d'alumnes no entenia l'enunciat i em van preguntar el seu significat en nombroses ocasions durant la realització del test. Potser aquestes dificultats foren ocasionades degut que no és molt habitual veure exercicis amb aquesta estructura als llibres de text actuals, però la pregunta en sí és interessant ja que gràcies a aquesta, podem analitzar si els alumnes són

capaços d'identificar les relacions i realitzar les assignacions adequades quan canviem l'element donat inicialment.

A més, pel que es pot observar a les respostes dels alumnes, i degut probablement a la forma de denotar els apartats, es produeixen errors de relacionar els elements d'una mateixa fila en compte dels d'una mateixa columna (com es pretén a l'enunciat). Per això, seria convenient modificar la estructura de l'activitat o dividir aquesta en dues. Una possible solució seria donar les dades en una taula però mantenint la estructura, tal i com es mostra a continuació:

a)

x	\longrightarrow	$x + 2$
6	\longrightarrow	...
r	\longrightarrow	...

b)

x	\longrightarrow	$4x$
3	\longrightarrow	...
t	\longrightarrow	...

Tot i això, no podem assegurar la eficàcia d'aquesta forma de presentar la tasca ja que es tracta d'un model que no s'ha pogut experimentar prèviament.

D'altra banda, cal dir també que no estaria de més modificar la forma d'enunciar la tasca per tal d'intentar millorar la comprensió de la pregunta.

- A la pregunta 9 podríem afegir unes línies i demanar que s'explique la resposta donada ja que, segurament, no puguem entrevistar tots els alumnes i aquest fet ens facilite molt l'anàlisi del tipus d'identificació que fan de les lletres. A més, podríem preguntar si, per exemple, $x+10$ és major que $n-2$ i demanar-los que expliquen la seua resposta per tal de veure si només es fixen en el nombre que acompanya la lletra per respondre o en tota la expressió com a un sol nombre.
- D'altra banda, a l'enunciat de la pregunta 12 caldria afegir que si no és possible simplificar la expressió, que s'escriga la paraula *NO*, ja que alguns alumnes la deixen en blanc i, d'aquesta manera, no podem reconèixer si ho fan perquè pensen que no es pot simplificar o perquè no saben com fer-ho.
- A les preguntes 14, 15, 16 i 17 ens pregunten què podem dir d'una certa lletra quan apareix en una expressió o una equació. En molts casos, els alumnes d'aquest experiment no són capaços d'identificar que el que es demana exactament a l'enunciat és que troben el valor o valors d'una lletra i, per això, donen expressions incompletes (per exemple l'alumna 28 respon $r=30-s-t$ a la pregunta *què pots dir de r si $r=s+t$ i $r+s+t=30$?). És per això que caldria modificar l'enunciat i preguntar si es pot trobar el valor de la lletra, en compte de preguntar el que es pot dir d'ella. Altra alternativa seria mantindre l'enunciat*

però comentar-ho de forma oral al repartir la part 2 del test als alumnes. Siga com siga, caldria fer-ho explícit.

A més, a la pregunta 17 estaria bé afegir que es diguera el màxim possible sobre c (quan $c+d=10$ i $c<d$) ja que alguns alumnes deixen la resposta a mitges i així no podem identificar si el que escriuen és tot el que saben o no. És el cas de l'alumne 12 que, com hem pogut observar a la entrevista, és capaç de veure que c pot prendre diversos valors però considera contestada la pregunta donant tan sols $c=4$, fet que (si no haguérem realitzat la entrevista) ens haguera conduït a concloure que l'alumne avalua la lletra, en compte d'identificar-la com a variable.

- Altre ítem que ha ocasionat nombroses dificultats ha sigut el 25 i probablement algunes d'elles hagen sigut ocasionades per la falta de familiaritat de la majoria d'alumnes amb el context del problema. Molts d'ells no estan habitualment en contacte amb paraules com ara *sou base*, *hores extres...* i, de fet, durant la realització del test preguntaren quin era el seu significat. És per això que potser els resulte més difícil entendre el problema i, tot i que comprendre el context emprat no és un factor decisiu per poder resoldre'l o no correctament, pot influir en les respostes dels alumnes. Potser si canviarem el context a un amb què els alumnes estigueren més familiaritzats, el resoldrien amb èxit un nombre major d'ells i ens seria més fàcil trobar altre tipus de dificultats presentades. Podríem emmarcar el problema, per exemple, en el context de la telefonia mòbil i el cost de les cridades i enunciar-lo com segueix:

En una companyia telefònica, quan cridem desde l'extranger ens cobren 1 € per l'establiment de cridata i 0.50 € per cada minut que parlem. Si t és el temps (en minuts) que dura una cridata i p el preu que ens costa (en euros):

- a) Escriu una equació que relacione el preu p amb t :*
- b) Quin serà el preu d'una cridata de 4 minuts?*

Caldria, per descomptat, experimentar per a poder afirmar si efectivament el nombre d'errades disminueix o és manté igual.

- Per últim, a l'exercici 28 estaria bé afegir algunes línies per tal que els alumnes explicaren com han obtés els resultats ja que açò facilitaria molt la tasca al corrector i ajudaria a identificar millor la interpretació que fan els alumnes de les lletres en aquest cas.

Tot i això, com ja hem dit abans caldria experimentar més el test per poder averiguar si les errades de comprensió que acabem d'esmentar es produeixen en casos particulars o en general, i poder establir conclusions per tal de millorar-lo.

Tampoc no descartaríem repartir un full a l'inici del test per tal de donar una mena d'instruccions per al seu adequat emplenament. Algunes de les coses que podríem incloure són: Realitzar totes les operacions als fulls del test, realitzar les explicacions de la forma més detallada possible, senyalar si hi ha més d'una resposta correcta en algun ítem, escriure perquè no s'han resolt les preguntes amb respostes en blanc, els problemes que s'han presentat...

A més, estaria bé consultar altres investigacions sobre el tema per tal de trobar altres propostes de millora i poder comparar els resultats amb els obtinguts en aquest experiment.

9. RESUM DE RESULTATS I CONCLUSIONS

Després de l'anàlisi realitzat sobre l'ús i la interpretació que fan de les lletres el grup d'alumnes estudiat, comentem les conclusions a les quals s'ha arribat.

En primer lloc, cal destacar que ha sigut sorprenent trobar tan gran varietat d'interpretacions distintes en un grup d'alumnes que es troben en un mateix curs. Es poden trobar tant alumnes que interpreten la lletra com a variable com altres que no són capaços ni tan sols d'usar-la com a objecte. Aquesta diversitat amb què el professor es pot trobar a l'aula suposa un inconvenient que obliga a prendre les mesures pertinents per tal d'atendre les necessitats de tothom. És per això que és tan important l'estudi d'aquest tipus d'interpretacions, ja que suposa el pas inicial per comprendre els estudiants i conèixer les seues dificultats.

Cal destacar que, en la mostra analitzada, existeix una diferència entre els resultats obtinguts pels alumnes del grup de taller de matemàtiques i els del grup de 3r d'ESO A. Mentre que els primers mostren un comportament homogeni quan a la interpretació dels termes literals (de manera que la majoria d'ells no arriben a interpretar-los ni com a incògnita específica), al grup de 3r es poden trobar alumnes de tots els tipus, inclús alumnes amb un nivell d'interpretació de les lletres prou avançat.

Cal observar també que interpretar la lletra com a variable no resulta evident per a la majoria d'ells. De fet, més de la meitat dels alumnes estudiats troben dificultats a l'hora d'atribuir a les lletres el significat de nombres particulars no coneguts, és a dir, d'interpretar-les com a incògnites específiques. No obstant això, com ja s'ha mencionat anteriorment, per als alumnes amb més dificultats utilitzar les lletres com a objectes els ha ajudat a respondre amb èxit molts dels ítems del test ja que açò els ha permés reduir el significat abstracte d'aquestes a alguna cosa molt més concreta i real.

D'altra banda, les conclusions que podem establir per als alumnes entrevistats són, a nivell general, de caràcter positiu ja que, no només s'han pogut determinar els tipus d'interpretació de les lletres, sinó també s'han pogut modificar (utilitzant les preguntes pertinents) en els cassos en què no eren correctes. A més, els alumnes també han sigut capaços d'autocorregir els seus errors i millorar algunes de les respostes respecte les que havien donat al test.

També podem destacar que, tot i que observant les respostes en paper es poden determinar les interpretacions que es fan de les lletres en cada cas, és després de la realització de les entrevistes quan ho podem garantir amb major seguretat.

Quant als errors comesos, cal destacar que entre els més freqüents s'ha pogut observar certa resistència a acceptar la falta de clausura, sobretot en alumnes que es troben en els grups A i B, ja que tendeixen a avaluar la lletra per donar respostes de tipus numèric. Un altre error que ha aparegut prou sovint ha sigut interpretar la manca de signe com una suma en compte de com un producte, degut a la influència de l'aritmètica (on 37 s'interpreta com 30 més 7) i també ha aparegut en moltes de les respostes l'error de no usar parèntesis per a representar expressions com ara $6(p+2)$, entre altres errors d'origens ben distints.

Cal destacar que alguns d'aquests errors també poden ser causa d'una incorrecta interpretació dels termes literals.

A més, com ja he comentat, es produeixen els mateixos errors estudiats pels investigadors anys enrere fet que, deuria almenys fer-nos reflexionar sobre què és el que s'està fent malament o què podríem millorar com a docents.

Per finalitzar, cal comentar que una idea que ens va sorgir durant la realització del treball fou la de buscar metodologies d'ensenyament per tractar d'evitar les dificultats produïdes i proporcionar ferramentes als alumnes amb l'objectiu d'ajudar-los a millorar la interpretació que fan dels termes literals.

A més, per tal de poder establir resultats concloents, també seria interessant la realització d'un estudi a major escala de les interpretacions que fan de les lletres alumnes de distintes etapes de secundària, tal com va fer Küchemann (1981) al seu treball. Açò ens permetria comparar les dades obtingudes amb les d'altres experiments i ens ajudaria a establir conclusions més contundents.

Tanmateix, per tal de no aprofundir en excés en el present estudi, deixem aquests projectes com a propostes per a possibles futures investigacions sobre el tema.

10. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Chalouh, L. and Herscovics, N. (1984). From letter representing a hidden quantity to letter representing and unknown quantity. In J. Moser, (Ed.), *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education North American Group* (pp. 71-76). Madison: University of Wisconsin.

Colera, J., Gaztelu, I. i Oliveira, M^a.J. (2011), *Matemàtiques Educació Secundària 3r curs*, Madrid: Anaya.

Collis, K. F. (1975). *The development of formal reasoning*. Newcastle: University of Newcastle.

DOGV (2007). Currículum matemàtiques ESO.

Freudenthal, H. (2001). El lenguaje algebraico. En H. Freudenthal. *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. Traducción, notas e introducción de Luis Puig. 2ª edición ampliada* (pp. 65-102). México: CINVESTAV.

Kieran, C. (1979), Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations. In D. Tall (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 128-133). Coventry: Warwick University.

Kieran, C. y Filloy Yagüe, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencia*, 7 (3), pp. 229-240.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In Á. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp.11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 2-8, pp. 102-119). London: John Murray.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence, *Journal of mathematical behavior*, 3, pp. 93-166.

Radford, L. (2004). Syntax and meaning. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME Conference*, 1, pp. 161-166.

ANNEX

Índex

1. ANNEX A

1.1. TEST

1.2. TAULA NIVELLS ÍTEMS

1.3. TAULES RESUM DE RESPOSTES

1.4. TAULES DE RESULTATS OBTINGUTS PER ÍTEM

1.5. TAULES DE RESULTATS OBTINGUTS PER ALUMNE

1.6. TAULES PERCENTATGES D'ERRORS

2. ANNEX B

2.2. ANÀLISI DIFICULTATS I ERRORS

2.1. ENTREVISTES SOBRE EL TEST

1. Annex A

1.1. TEST

TEST D'ÀLGEBRA (Part 1)

Nº Alumne/a:

Data:

Data de naixement:

Xic o xica:

1.- Si $a = 3$, a què és igual $4a$?

2.- Què significa $5n$? (Senyala totes les respostes que cregues que són correctes)

- a) $5 + n$
- b) $5 i n$
- c) $5 \times n$
- d) $5 + 5 + 5 + 5 + 5$
- e) $n + n + n + n + n$
- f) Altra resposta (escriu-la, per favor):

3.- Què significa $e3$? (Senyala totes les respostes que cregues que són correctes)

- a) $e \times 3$
- b) $e + 3$
- c) $3 \times e$
- d) $3 + 3 + 3$
- e) $e + e + e$
- f) $e i 3$
- g) Altra resposta (escriu-la, per favor):

4.- Què significa nm ? (Senyala totes les respostes que cregues que són correctes)

- a) $n i m$
- b) $n \times m$
- c) $n + m$
- d) $25 + 26$
- e) 25×26
- f) Altra resposta (escriu-la, per favor):

5.- Quina de les següents expressions escriuries per a representar $e + 2$ multiplicat per 3?
(Senyala totes les respostes que cregues que són correctes)

- a) $e + 6$
- b) $3 \times (e + 2)$
- c) $3 \times e2$
- d) $3 (e + 2)$
- e) $3e + 6$
- f) $e + 2 \times 3$
- g) Ninguna és correcta.

6.- Quina de les següents expressions escriuries per a representar 2 sumat a 5a? (Senyala totes les respostes que cregues que són correctes)

- a) 5a més 2
- b) $5a + 2$
- c) 7a
- d) $2 + 5a$
- e) 7
- f) 10a
- g) $(2 + 5) a$
- h) Ninguna és correcta.

7.- Ompli els buits seguint la regla indicada en el primer apartat de cada columna:

- | | |
|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $x \rightarrow x + 2$ | a') $x \rightarrow 4x$ |
| b) $6 \rightarrow \dots\dots$ | b') $3 \rightarrow \dots\dots$ |
| c) $r \rightarrow \dots\dots$ | c') $t \rightarrow \dots\dots$ |

8.- Respon els següents apartats:

- a) Sumar 4 a n pot escriure's com $n + 4$. Suma 4 en cada cas:

8	$n + 5$	$3n$

- b) Multiplicar n per 4 pot escriure's com $4n$. Multiplica per 4 en cada cas:

8	$n + 5$	$3n$

9.- Senyala quina d'aquestes expressions és la més gran i quina la més xicoteta:

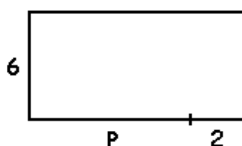
$n + 1$, $n + 4$, $n - 3$, n , $n - 7$

La més gran: La més xicoteta:

10.- Què és major $2n$ o $n + 2$? Explica la teua resposta.

.....

11.- Com escriuries l'àrea d'aquest rectangle?



Àrea =

TEST D'ÀLGEBRA (Part 2)

Nº Alumne/a:

Data:

Data de naixement:

Xic o xica:

12.- L'expressió $a + 3a$ pot ser escrita de forma més simple com $4a$. Escriu, si és possible, de forma més simple les següents expressions:

- a) $2a + 5a =$
- b) $2a + 5b =$
- c) $(a + b) + a =$
- d) $2a + 5b + a =$
- e) $(a - b) + b =$
- f) $3a - (b + a) =$
- g) $a + 4 + a - 4 =$
- h) $3a - b + a =$
- i) $(a + b) + (a - b) =$

13.- Respon els següents apartats:

- a) Si $a + b = 43$, $a + b + 2 =$
- b) Si $n - 246 = 762$, $n - 247 =$
- c) Si $e + f = 8$, $e + f + g =$

14.- Respon els següents apartats:

- a) Què pots dir de u si $u = v + 3$ i $v = 1$?
- b) Què pots dir de m si $m = 3n + 1$ i $n = 4$?

15.- Respon els següents apartats:

- a) Què pots dir sobre a si $a + 5 = 8$?
- b) Què pots dir sobre b si $b + 2 = 2b$?

16.- Què pots dir de r si $r = s + t$ i $r + s + t = 30$?

.....
.....

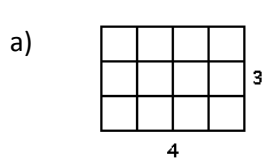
17.- Què pots dir de c si $c + d = 10$ i c és menor que d ?

.....
.....

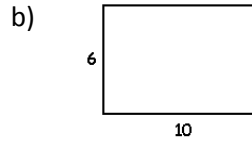
18.- Respon els següents apartats:

- a) Si $a = b + 3$, què passa amb a si b augmenta en 2?
- b) Si $f = 3g + 1$, què passa amb f si g augmenta en 2?

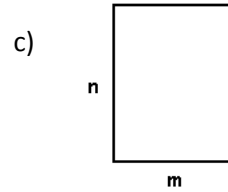
19.- Calcula l'àrea d'aquestes figures:



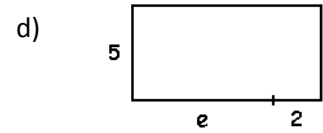
A =



A =



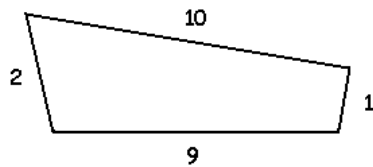
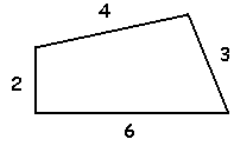
A =



A =

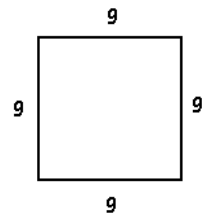
20.- El perímetre d'aquesta figura és igual a $6 + 3 + 4 + 2$, cosa que és igual a 15.

Calcula el perímetre de la figura següent:

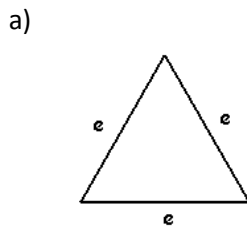


P =

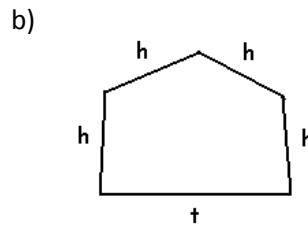
21.- Aquest quadrat té costats de longitud g. Per tant, podem escriure el seu perímetre com $P = 4g$.



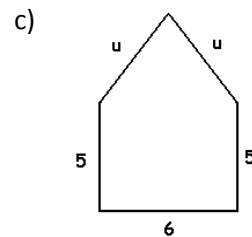
Pots escriure el perímetre de les següents figures?



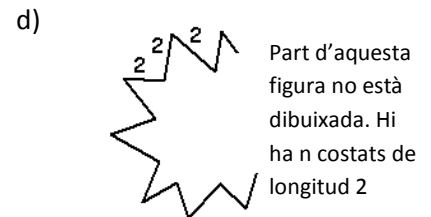
P =



P =

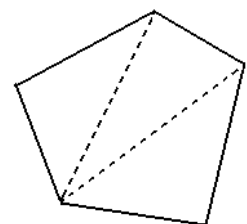


P =



P =

22.- En una figura com aquesta el nombre de diagonals es pot obtindre restant 3 al nombre de costats. Per tant, una figura amb 5 costats té 2 diagonals.



- a) Una figura amb 57 costats té diagonals.
- b) Una figura amb k costats té diagonals.

TEST D'ÀLGEBRA (Part 3)

Nº Alumne/a:

Data:

Data de naixement:

Xic o xica:

23.- Quan són certes les següents igualtats: sempre, mai o de vegades?

a) $A + B + C = C + A + B$

i. Sempre

ii. Mai

iii) De vegades. Quan

.....

b) $L + M + N = L + P + N$

i. Sempre

ii. Mai

iii) De vegades. Quan

.....

24.- Si Joan té J caniques i Pere en té P, podries escriure el nombre de caniques que tenen

entre els dos?

25.- El sou base de Maria és de 70 € a la setmana. A més, li paguen 2€ per cada hora extra treballada. Si h és el nombre d'hores extres que ha treballat Maria a la setmana i W el seu sou total a la setmana (en euros):

a) Escriu una equació que relacione el sou W amb h:

b) Quin será el sou de Maria si ha treballat 4 hores extres?

26.- En un forn, cada pastís val p euros i cada coca en val c. Si comprem 4 pastissos i 3 coques, què significa $4p + 3c$?

.....

.....

.....

27.- L'equació a) és vertadera quan $x = 6$. \longrightarrow a) $(x + 1)^3 + x = 349$

Aleshores, quin valor de x farà que l'equació b) \longrightarrow b) $(3x + 1)^3 + 3x = 349$

sigui vertadera? Doncs $x =$

Explicació:

.....

.....

28.- En una papereria, cada llapis blau costa 5 cèntims i cada llapis roig en costa 6. Anomenem b al nombre de llapis blaus que compre i r al nombre de llapis rojos que compre. Si compre alguns llapis blaus i alguns rojos i em gaste 90 cèntims, què pots dir sobre b i r ?

.....

.....

.....

1.2. TAULA NIVELLS ÍTEMS

Nivell / tipus interpretació lletres	Purament numèric	Lletra avaluada	Lletra ignorada	Lletra com a objecte	Lletra com a incògnita específica	Lletra com a nombre generalitzat	Lletra com a variable
Nivell 1	7b, 7b', 8a1, 8b1, 19a, 19b, 20, 22a, 25b	1, <u>15a</u> , 25b	<u>13a</u>	<u>12a</u> , <u>21a</u>			
Nivell 2		<u>9</u> , <u>14a</u> , <u>14b</u> , <u>15b</u>	<u>8a2</u> , 8b3, <u>13b</u>	4, 7c, 7c', <u>12d</u> , <u>19c</u> , <u>21b</u> , <u>21c</u>			
Nivell 3				12b, 12c, 12g, 12i	2, 3, <u>6</u> , <u>8a3</u> , <u>12h</u> , <u>13c</u> , <u>16</u> , <u>21d</u> , <u>22b</u> , 23a, 24	<u>17</u>	
Nivell 4					5, <u>8b2</u> , 11, <u>12e</u> , 12f, 18a, 18b, <u>19d</u> , <u>25a</u> , <u>26</u> , <u>27</u> , <u>28</u>	<u>23b</u>	<u>10</u>

- Els ítems subratllats són els que s'analitzen amb més profunditat a l'apartat 5.3 del treball.

1.3. TAULES RESUM DE RESPOSTES

Alumne / ítem	1	2	3	4	5	6	7b	7c	7b'	7c'	8a.1	8a.2	8a.3	8b.1	8b.2	8b.3	9	10	11
1	B	B	I	B	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	M
2	B	I	I	B	B	I	B	B	B	M	B	M	M	B	M	B	B	I	M
3	B	I	I	M	I	I	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	M	M
4	-	I	I	B	I	M	M	M	M	M	B	M	M	B	M	B	B	M	M
5	B	I	I	B	I	M	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	M	B
6	B	I	I	I	I	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B
7	B	B	B	B	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B
8	B	I	I	B	I	I	B	B	B	B	B	B	B	B	M	M	B	M	M
9	B	B	I	M	I	I	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	I	B
10	-	I	I	B	M	I	B	B	B	B	B	M	M	B	M	M	M	M	B
11	B	B	I	B	I	I	B	B	M	M	B	B	B	B	M	B	B	I	M
12	B	I	I	M	I	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B
13	B	I	M	B	I	I	B	B	B	M	B	M	M	B	B	B	B	M	M
14	B	M	I	M	I	B	B	-	M	-	B	B	B	B	B	B	M	M	B
15	B	B	I	B	I	B	B	B	M	B	B	B	M	B	B	B	B	M	B
16	B	I	I	B	I	I	B	B	M	B	B	M	M	B	M	B	B	M	M
17	M	M	M	M	I	I	B	B	-	B	B	B	B	B	M	B	B	M	M
18	-	M	-	M	M	M	B	B	B	B	B	B	M	B	M	B	M	M	B
19	B	I	I	B	I	I	B	B	B	B	B	B	M	B	M	B	B	M	M
20	B	I	I	B	I	I	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	M	B
21	B	B	I	B	M	B	B	M	B	B	B	B	M	B	M	B	B	M	B
22	B	M	I	I	I	M	B	B	M	M	B	M	M	B	M	B	B	M	M
23	B	M	M	B	I	I	B	B	M	M	B	M	M	B	M	M	M	M	M
24	I	M	M	M	I	M	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	M	M
25	M	I	I	B	I	I	M	M	M	M	B	M	M	B	M	B	B	M	M
26	M	M	I	M	M	M	B	B	M	M	B	M	B	B	M	M	B	M	M
27	B	M	I	M	I	I	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	B	M	M
28	M	B	B	B	M	I	B	B	B	B	B	B	M	B	M	B	M	M	M
29	B	I	I	B	M	M	B	B	B	B	B	B	M	B	M	B	M	M	M

Alumne / ítem	12a	12b	12c	12d	12e	12f	12g	12h	12i	13a	13b	13c	14a	14b	15a	15b	16	17	18a	18b
1	B	M	M	B	B	B	M	B	M	B	B	M	B	B	B	B	B	I	M	M
2	B	M	B	B	B	-	B	B	M	B	B	B	B	B	B	M	M	I	B	M
3	B	M	B	B	M	M	B	M	M	B	B	M	B	B	B	-	M	I	B	M
4	B	B	B	B	M	M	B	B	M	B	B	B	M	-	B	M	B	I	M	M
5	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	I	B	B
6	B	-	-	B	-	-	-	-	-	B	B	B	B	B	B	B	B	I	B	M
7	B	B	B	B	B	-	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	I	B	B
8	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	-	M	I	B	I
9	B	B	B	B	M	M	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	I	M	M
10	B	M	M	B	B	M	-	-	-	B	M	M	B	B	B	M	B	M	M	M
11	B	B	B	B	M	M	B	B	M	B	M	B	B	B	B	B	B	I	M	M
12	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	I	B	M
13	B	M	M	M	M	M	M	M	M	B	B	M	M	M	B	M	M	I	M	M
14	B	B	B	B	M	M	B	B	-	B	B	B	M	M	B	-	M	I	M	M
15	B	M	M	M	M	M	B	B	M	B	B	B	B	B	B	-	M	I	M	M
16	B	M	M	B	M	M	M	B	M	M	B	M	B	B	B	M	M	I	M	M
17	B	M	M	B	M	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	M	-	I	M	M
18	M	-	-	-	-	-	M	-	M	B	-	M	B	B	B	-	I	I	M	M
19	B	B	M	M	M	B	M	M	M	B	M	M	B	B	B	B	M	I	M	M
20	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	-	B	I	M	M
21	B	M	M	M	B	M	M	M	M	B	B	B	B	B	B	B	M	I	M	M
22	B	M	M	M	-	-	M	M	M	B	B	M	M	M	B	M	-	I	-	-
23	B	M	M	M	M	M	M	M	M	I	M	M	B	B	B	-	M	M	M	M
24	B	B	M	B	M	M	B	B	M	B	B	B	M	M	B	M	M	I	M	M
25	M	B	M	M	M	M	M	M	M	B	B	M	B	B	B	M	M	I	B	M
26	B	M	M	M	M	M	M	M	M	B	B	M	M	M	B	M	M	I	I	M
27	M	B	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	B	M	M	M	M	M	M	M
28	M	M	M	M	M	B	M	B	M	B	B	B	B	B	B	M	I	M	M	M
29	M	M	M	M	M	M	M	M	M	B	M	M	B	M	B	-	M	I	M	M

Alumne / ítem	19a	19b	19c	19d	20	21a	21b	21c	21d	22a	22b	23a	23b	24	25a	25b	26	27	28
1	B	B	B	M	B	B	B	M	M	B	B	B	B	B	M	B	M	M	M
2	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	I	B	M	M	B
3	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	M	B	B	B	M	M	M	B	M
4	M	M	M	M	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M
5	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	M	B	B
6	B	B	B	B	B	B	B	M	B	M	M	B	B	B	M	B	M	B	M
7	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	-	B	M	M	M
8	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	M	M	B	B
9	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B
10	B	B	M	B	B	B	B	M	M	M	M	B	M	B	M	M	M	M	M
11	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	M	M	M	B
12	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	M	B	B	B	M	B	B
13	B	B	B	M	B	M	M	M	M	B	M	B	M	M	M	B	M	B	-
14	B	B	B	B	B	B	M	B	M	B	B	B	M	B	M	M	M	M	M
15	B	B	B	B	B	B	M	M	M	M	M	B	M	B	M	M	M	M	M
16	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	M	B	M	M	M
17	M	M	M	M	-	B	B	M	M	-	M	B	M	B	M	M	M	M	M
18	B	B	B	B	B	-	M	M	M	B	M	B	B	M	M	M	M	M	M
19	M	B	B	M	B	B	B	M	B	B	B	B	M	B	B	B	B	-	B
20	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	M	M	-	-	-	-	-
21	B	B	B	M	B	B	B	M	B	B	B	B	I	B	M	M	M	B	M
22	B	B	B	M	B	B	B	M	M	M	B	B	M	M	M	B	M	M	M
23	M	M	M	M	B	B	M	M	M	M	M	B	M	B	B	B	M	M	M
24	M	M	M	M	B	B	M	B	M	B	B	B	M	B	M	M	M	M	M
25	M	B	M	M	B	B	M	M	M	B	M	B	M	B	M	M	M	M	M
26	B	B	B	M	B	B	B	B	M	M	M	M	M	B	M	M	B	M	M
27	M	M	M	-	B	M	M	M	-	M	M	B	M	B	-	-	B	-	-
28	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	M	B	M	B	M	B	M	B	I
29	B	B	B	M	B	B	B	M	B	B	M	B	M	B	M	M	M	B	B

1.4. TAULES DE RESULTATS OBTINGUTS PER ÍTEM

Resp./Ítem	1	2	3	4	5	6	7b	7c	7b'	7c'	8a1	8a2	8a3	8b1	8b2	8b3	9	10	11	12a	12b	12c	12d	12e	12f	12g	12h	12i	13a
Respostes correctes	21	7	2	18	1	6	26	24	18	17	28	19	11	28	8	24	23	0	11	24	12	10	17	9	8	14	16	5	26
Respostes incompletes	1	14	23	2	22	16	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Respostes incorrectes	4	8	4	9	6	7	3	4	10	11	1	10	18	1	18	5	6	26	18	5	15	17	11	17	16	13	10	21	3
Sense resposta	3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	1	3	5	2	3	3	0

Resp./Ítem	13b	13c	14a	14b	15a	15b	16	17	18a	18b	19a	19b	19c	19d	20	21a	21b	21c	21d	22a	22b	23a	23b	24	25a	25b	26	27	28
Respostes correctes	21	14	23	21	28	8	10	0	8	2	22	24	22	12	28	26	20	15	12	21	15	28	9	25	6	14	5	11	8
Respostes incompletes	0	0	1	0	0	0	3	25	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
Respostes incorrectes	7	15	5	7	1	13	14	4	19	26	7	5	7	16	0	2	9	14	16	7	14	1	19	4	19	13	23	14	17
Sense resposta	1	0	0	1	0	8	2	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	3	2	1	3	3

1.5. TAULES DE RESULTATS OBTINGUTS PER ALUMNE

Respostes/Alumnes	1	2	3*	4*	5	6	7	8	9	10*	11	12	13*	14	15*
Respostes correctes	39	38	34	29	48	41	48	46	45	24	38	47	22	31	31
Respostes incompletes	3	6	5	4	4	6	2	3	5	3	5	4	4	3	3
Respostes incorrectes	16	13	18	23	6	4	6	7	8	27	15	7	31	20	23
Sense resposta	0	1	1	2	0	7	2	2	0	4	0	0	1	4	1


Respostes/Alumnes	16	17	18	19	20	21	22	23*	24*	25*	26*	27*	28*	29*
Respostes correctes	29	24	21	33	38	39	20	16	26	18	19	8	32	24
Respostes incompletes	5	3	2	5	5	3	4	3	3	5	3	3	3	4
Respostes incorrectes	24	27	23	19	9	15	29	38	29	35	36	41	23	29
Sense resposta	0	4	12	1	6	1	5	1	0	0	0	6	0	1

* Alumnes que assisteixen a classes de taller (dels dos grups analitzats).

1.6. TAULES PERCENTATGES D'ERRORS

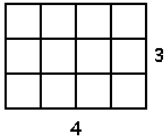
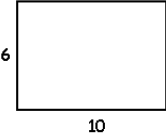
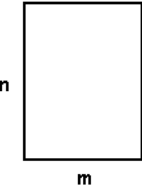
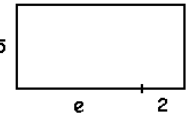
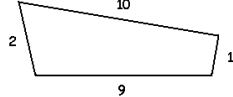
1.- Si $a = 3$, a què és igual $4a$?	2.- Què significa $5n$? (Senyala totes les respostes que cregues que són correctes)	3.- Què significa e^3 ? (Senyala totes les respostes que cregues que són correctes)	4.- Què significa nm ? (Senyala totes les respostes que cregues que són correctes)	5.- Quina de les següents expressions escriuries per a representar $e + 2$ multiplicat per 3? (Senyala totes les respostes que cregues que són correctes)	6.- Quina de les següents expressions escriuries per a representar 2 sumat a $5a$? (Senyala totes les respostes que cregues que són correctes)	7.b - Ompli els buits seguint la regla indicada en el primer apartat de cada columna: $6 \rightarrow \dots\dots$
$a=4$ (6,9 %) $4+3$, -1 (3,4 %)	$5+5+5+5+5$ (17,24%) $5+n$ (10,34 %)	$e i 3$ (10,3 %) $e+3$ (10,3 %)	25×26 (20,7 %) $n i m$, $n + m$ (10,3 %) $25+26$ (3,4 %)	$e + 2 \times 3$ (24,1 %) $e + 6$ (6,9 %)	$(2+5)a$ (17,2 %) $7a$, $10a$ (3,4 %)	$x+6$ (6,9 %) $x2$ (3,4 %)

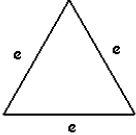
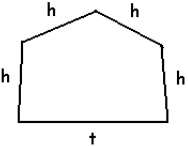
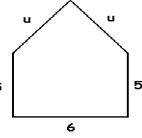
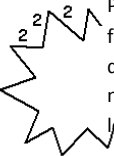
7.c - Ompli els buits seguint la regla indicada en el primer apartat de cada columna: $r \rightarrow \dots\dots$	7.b' - Ompli els buits seguint la regla indicada en el primer apartat de cada columna: $3 \rightarrow \dots\dots$	7.c' - Ompli els buits seguint la regla indicada en el primer apartat de cada columna: $t \rightarrow \dots\dots$	8.a.1 - Sumar 4 a n pot escriure's com $n + 4$. Suma 4 a ... 8	8.a.2 - Sumar 4 a n pot escriure's com $n + 4$. Suma 4 a ... $n+5$	8.a.3 - Sumar 4 a n pot escriure's com $n + 4$. Suma 4 a ... $3n$	8.b.1 - Multiplicar n per 4 pot escriure's com $4n$. Multiplica per 4 ... 8
rx , $r2$, $9+r$ (3,4%)	$3x$ (17,2 %) $3+4$, $3+6$, 7, 8, 43 (3,4%)	tx (17,24 %) $4r$, tr , $7t$, $18+r$ (3,4%)	32 (2,4 %)	9 (24,1 %) $10n$, 32, $n+5+12$ (3,4 %)	$7n$, $(4+3)n$ 32, 12, 7 (3,4 %)	34 (3,4 %)

8.b.2 - Multiplicar n per 4 pot escriure's com 4n. Multiplica per 4 ... n+5	8.b.3 - Multiplicar n per 4 pot escriure's com 4n. Multiplica per 4 ... 3n	9.- Senyala quina d'aquestes expressions és la més gran i quina la més xicoteta: n+1, n+4, n-3, n, n-7	10.- Què és major 2n o n + 2?	11.- Com escriuries l'àrea d'este rectangle? 	12.a.- Escriu, si és possible, de forma més simple 2a+5a	12.b.- Escriu, si és possible, de forma més simple 2a+5b
n+20, 20n (20,7 %) 4n+5 (6,9 %) 9n, 9, 4n+9, 34(3,4 %)	12 (6,9 %) 7n, 3n+4, 34 (3,4 %)	La més gran: n-7, n+1 (3,4 %) La més xicoteta: n (10,3 %), n-3 (6,9 %)	2n perquè és una multiplicació. (82,8 %) Són iguals perquè els dos tenen el mateix nombre. (3,4 %) 2n perquè porta la lletra davant. (3,4 %)	$A=6p \cdot 2$ (13,8 %) $A=6 \cdot 2=12$ (10,3 %) $A=6 \cdot p+2$, $A=6^2+p^2+2^2$ (6,9 %) $A=b+a \cdot 2$, $P=6 \cdot 2+8 \cdot 2$, $A=\frac{b}{a}=\frac{p+2}{6}$, $A=6 \cdot [(2+p) \cdot 2]$, $A=p+6+2$, $A=12+2+p^2$, $A=\frac{6 \cdot 2}{2}$, $A=1$, $A=p \cdot 6$ (3,4 %)	$7a^2$, $a(2 \cdot 5)$ (6,9 %) $2a+5a$ (3,4 %)	7ab (48,3 %) $(2+5)(a+b)$ (3,4 %)

12.c.- Escriu, si és possible, de forma més simple (a+b)+a	12.d.- Escriu, si és possible, de forma més simple 2a+5b+a	12.e.- Escriu, si és possible, de forma més simple (a-b)+b	12.f.- Escriu, si és possible, de forma més simple 3a-(b+a)	12.g.- Escriu, si és possible, de forma més simple a+4+a-4	12.h.- Escriu, si és possible, de forma més simple 3a-b+a	12.i.- Escriu, si és possible, de forma més simple (a+b)+(a-b)	13.a.- Si a+b=43, a+b+2=...
a^2 (41,4 %) a^2+b (27,6 %) $(a+b)+a$ (10,3 %) a^2b (6,9 %) 2ab, 2a+b+a (3,4 %)	$7a^2b$ (17,2 %) $2a^2+5b$ (6,9 %) 8ab, $10a^2b$, 22 (3,4 %)	a-b (17,2 %) $a-b^2$ (13,8 %) a+b (6,9 %) -2b+a+b, 34 (3,4 %)	4a-b (6,9 %) $3a^2-b$, 3ab, 2a-3a-b, 3-b, 10, 3ab+3a, -3ab-3a ² (3,4 %)	$a+a=a^2$ (24,1 %) $4a^2-4$, a+a, a^2-8 , a^2-16 , $8a^2$, 4^2+a^2 , 30 (3,4 %)	$3a^2-b$ (20,7 %) 4a, $3a^2b$, 40 (3,4 %)	a^2-b^2 (31 %) a^2+b^2 , a^2 (10,3 %) 0, $a^2+(-b)^2$, a+b, a^2b^2 , 70 (3,4 %)	45ab, 7, $43+b+2=45b$ (3,4 %)

13.b.- Si $n-246=762$, $n-247=...$	13.c.- Si $e+f=8$, $e+f+g=...$	14.a.- Què pots dir de u si $u=v+3$ i $v=1$?	14.b.- Què pots dir de m si $m=3n+1$ i $n=4$?	15.a.- Què pots dir sobre a si $a+5=8$?	15.b.- Què pots dir sobre b si $b+2=2b$?	16.- Què pots dir de r si $r=s+t$ i $r+s+t=30$?	17.- Què pots dir de c si $c+d=10$ i c és menor que d ?
515 (6,9 %) 770, 565, 765, 11, 763 (3,4 %)	8g (20,7 %) 9 (17,2 %) 12 (6,9 %) 8+f+g (3,4 %)	2 (6,9 %) u-2, 1+3, u+u=4 (3,4 %)	4m, m=4-n, 8, 3·4+1=12, 1, 5, m=13n (3,4 %)	No m'ho sé (3,4 %)	b val b (13,8 %) b=1 (10,3 %) b=4, b=b·2, 2=b+2=2b, b=0, b={el que dóna la b+2 que multiplica 2b}, no se sap la b (3,4 %)	r=10, 30-r (6,9 %) r=0, r=20, r=10, 30, 20...; r=10, 28,... ; que r, s i t valen 10; t=15, s=15, r=0; r=30-s-t, r=s ² -t ² (3,4 %)	c=4 (31 %) c pot donar 1,2,3,4 (24,13 %) c pot ser 4,3,2,1,0 (10,3 %) c és un nombre més gran que d; c=3 (6,9 %) c=6,7,8,9,10; c podria ser 1,2,3,4 o un nombre negatiu; c=4,25 i d=4,75 (3,4 %)

18.a.- Si $a=b+3$, què passa amb a si b augmenta en 2?	18.b.- Si $f=3g+1$, què passa amb f si g augmenta en 2?	19.a.- Calcula l'àrea de: 	19.b.- Calcula l'àrea de: 	19.c.- Calcula l'àrea de: 	19.d.- Calcula l'àrea de: 	20.- Calcula el perímetre de la figura següent: 
$a=2b+3$ (13,8 %) Que el nombre és més gran; $a=2+3$ (6,9 %) $a=b+1$, $a^2=b^2+3$, $2b$, $2b+5$, que ja no seria a , que a és el doble de b (3,4 %)	$f=7$ (20,7 %) $f=5g+1$ (17,2 %) $f=6g+1$ (6,9 %) Que f és el triple que $3g$; que el resultat seria més gran; que ja no seria f ; $f=6$; $f=(5+g)+1$ (3,4 %)	$A=4^2+3^2=25$ (10,3 %) $A=24$, $A=6$, $A=4·3·12$, $A=4·2+3·2$ (3,4 %)	$A=10^2+6^2$ (10,3 %) $A=6·2+10·2$, $A=64$ (3,4 %)	$A=n·2+m·2$, $A=n+m$, $A=n^2+m^2$, $A=n^2m^2$ (3,4 %)	$A=5e2$ (17,2 %) $A=e^2+2^2+5^2$ (6,9 %) $A=5·2+5+2·2$, $A=5·e+4$, $A=5·e+2^2$, $A=5^2·(e+2)^2$, $A=5$, $A=5·e+2$, $A=10$ (3,4 %)	

21.a.- Pots escriure el perímetre de les següents figures? 	21.b.- Pots escriure el perímetre de les següents figures? 	21.c.- Pots escriure el perímetre de les següents figures? 	21.d.- Pots escriure el perímetre de les següents figures?  <p>Part d'aquesta figura no està dibuixada. Hi ha n costats de longitud 2</p>	22.a.- Una figura amb 57 costats té ... diagonals	22.b.- Una figura amb k costats té ... diagonals	23.a.- Quan són certes les següents igualtats: sempre, mai o de vegades? $A+B+C=C+A+B$	23.b.- Quan són certes les següents igualtats: sempre, mai o de vegades? $L+M+N=L+P+N$
e^3 (6,9 %) $3g$ (3,4 %)	$P=h^4+t$ (10,3) $P=4et$, $P=5g$, $P=4t+1t$, $P=th^4$, $P=t+h^2+h^2$, $P=3h+1t$, $P=4h \cdot t$ (3,4 %)	$P=2u+5^2+6$ (20,7%) $P=6+5^2+u^2$, $P=16+u^2$, $P=6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot u^2$, $P=6+5^2+2^2$, $P=5^2 \cdot u^2 \cdot 6$ (3,4 %)	$P=2$, $P=14 \cdot 2$, $P=2 \cdot 2 \cdot 2=6$, $P=2^3$, $P=2^7$, $P=2^{11}$, $P=2x12$, $P=2^{14} \cdot n2$, $P=2 \cdot x$, $P=2 \cdot 13+n2$, $P=6+2n$, $P=2^3+n$, $P=14+2n$, $P=n$ i $P=2 \cdot 14n$ (3,4 %)	55 (6,9 %) 285, 114, n, 3 (3,4 %)	x (10,3 %) k-2 (6,9 %) 3-k, k, -3k, 2k, L, n, 0, 4, 2-k (3,4 %)	De vegades, quan valguen el mateix totes les lletres. (3,4 %)	Mai (65,5 %)

24.- Si Joan té J caniques i Pere en té P, podries escriure el nombre de caniques que tenen entre els dos?	25.a.- Escriu una equació que relacione el sou W amb h:	25.b.- Quin serà el sou de Maria si ha treballat 4 hores extra?	26.- En un forn, cada pastís val p euros i cada coca en val c. Si comprem 4 pastissos i 3 coques, què significa $4p+3c$?	27.- L'equació $(x+1)^3+x=349$ és vertadera quan $x=6$. Aleshores, quin valor de x farà que l'equació $(3x+1)^3+3x=349$ siga vertadera?	28.- [...] Si compres alguns llapis blaus i alguns rojos i em gaste 90 cèntims, què pots dir sobre b i r?
JP (13,8 %) J+P perquè el nombre de caniques no el fica (6,9 %)	$W+h$ (13,8 %) $70+2h$ (10,3 %) $70W+2h$, $h=W$ (6,8 %) $W+2h=70$, $h \cdot W$, $(2+h)+W$, $70+2x$, $70+2=W$, $W+h=Wh$, $70+2h=140h$ (3,4 %)	8 (13,8 %) $W+8$ (6,9 %) $W+4h$, $W+2 \cdot 4$, $70W+4h$, $W+h+2+2+2+2=x$, 74, 3·360, 78 (3,4 %)	Hem comprat 4 pastissos i 3 coques. (44,8 %) Els 4 pastissos són c euros i les 3 coques són c euros. (20,7 %) Hem comprat 4 pastissos de preu p i 3 coques de preu c. (6,9 %)	3, 6 (10,3 %) 2094, $\frac{346}{12}$, $\frac{348}{30}$:4, 25, 31, 18, 57 (3,4 %)	$r+b=90$ (6,9 %) $2b+2r=90$, Ha comprat 10 llapis rojos $6 \times 10=60$ i ha comprat 6 llapis blaus $5 \times 6=30$, Compra 4 llapis de cada color, Compra 15 rojos i 28 blaus, $r=45$ i $b=45$, $r=50$ i $b=40$ (3,4 %)

2. Annex B

2.1. ANÀLISI DIFICULTATS I ERRORS

Analitzem en detall les dificultats dels alumnes que s'han pogut observar en les respostes del test i els errors comesos per aquestos.

Pregunta 1

Degut que els alumnes es troben en un nivell bastant avançat, aquesta pregunta no presenta massa dificultats quant a la seua resolució. Llevat, això sí, de casos puntuals com ara el dels alumnes 26 i 28 que responen que $a = 4$ i el de l'alumne 24 que escriu $4a = 4 \cdot a$ (alumne que entén el significat de la expressió però no és capaç d'avaluar la lletra a). D'altra banda, hi ha altres alumnes que mostren dificultats quant a la interpretació de la expressió ja que l'alumne 25 contesta $4 + 3$, interpretant la manca de signe com una suma, i l'alumne 17 que respon -1 , interpretant-la com una resta.

Pregunta 2

L'error més freqüent que s'ha donat en aquesta pregunta ha sigut considerar $5n$ com $5+5+5+5+5$ (en el 17,24 % dels casos). Aquesta interpretació apareix com a conseqüència d'una confusió: considerar la expressió $5n$ com 5 vegades 5 i no 5 vegades n . Amb menor freqüència (el 10,34%), s'ha considerat com a suma de 5 més n per part dels alumnes que ja havien fallat la resposta a la pregunta 1, interpretant la manca de signe entre nombre i lletra com una tasca distinta a la de multiplicar. Kieran i Filloy (1989) afirmen que aquest error és degut que en aritmètica la concatenació significa addició, és a dir, 37 significa $30 + 7$ i potser els alumnes quan passen a l'estudi de l'àlgebra tracten d'adaptar les concepcions que ja posseïen en aritmètica a aquest context. La major dificultat ha sigut veure $5n$ com la suma de 5 voltes n , és a dir, $n + n + n + n + n$ ja que en la majoria dels casos els alumnes s'han limitat ha assenyalar que $5n = 5 \cdot n$.

Pregunta 3

Aquesta pregunta és igual que l'anterior, a diferència de que en aquesta el nombre de dificultats quant a la seua interpretació s'ha incrementat respecte al cas anterior. Açò pot ser degut a la tendència que es té de col·locar la lletra darrere del nombre quan aquestos estan multiplicant-se, conseqüència, potser, de l'actual notació dels monomis que apareix als llibres de text de secundària (en la que els nombres apareixen davant de les lletres). Per tant, el veure la expressió en la posició no habitual augmenta les dificultats per a la seua interpretació. Els errors comesos han sigut respostes del tipus $e3$ com a $e i 3$ i $e3$ com a $e \cdot 3$ però no $3 \cdot e$ (no considerant la propietat commutativa del producte). Cal destacar que, almenys en aquesta mostra d'estudiants, no han aparegut errors d'interpretar $e3$ com a $3+3+3$, inclús en els casos d'alumnes els quals consideraven a l'anterior pregunta que el significat de $5n$ era $5+5+5+5+5$.

Pregunta 4

En aquesta pregunta, en canvi, tot i que és d'una major dificultat quant a la seua interpretació degut a que ara el nombre de vegades que es multiplica un nombre no és conegut (n vegades m o m vegades n) hi ha un nombre major de respostes correctes. Potser, açò és deu a què hi ha una única opció correcta i no és necessari interpretar la lletra com a incògnita específica. Haguérem hagut de donar altres possibles opcions com ara $n+n+n+n$, $m+...+m$ n vegades, ... per tal d'identificar millor quin és el valor que li donen els alumnes a questa expressió. De tota manera, tot i que se'ls donava l'opció d'aportar altra resposta que cregueren correcta, els que han omplit dita casella, ha sigut amb respostes del tipus $n \cdot m$ o mn , i no amb les que acabem de citar. D'altra banda, cal destacar que l'error més freqüent que s'ha donat entre els alumnes ha sigut el de considerar que nm significa 25×26 (pels alumnes 9, 12, 14, 18, 22, 26), tot i que com es pot observar a algunes de les entrevistes realitzades posteriorment, potser haja sigut un error de comprensió. Els alumnes 12 i 26, afirmen en la seua entrevista que nm podria ser 25×26 , però que no és exactament el mateix. És a dir, interpreten que nm pot tindre molts valors distints. A més, per les seues respostes es dedueix que aquests no consideren que n i m hagen de ser nombres consecutius (tal i com passa amb les lletres segons l'ordre alfabètic). Altres respostes errònies han sigut: n i m (alumnes 3, 22, 27), $n + m$ (alumnes 17, 24, 26) i $25 + 26$ (alumne 22).

Pregunta 5

Aquesta pregunta presenta major dificultat que les anteriors ja que requereix veure que 3 afecta a la totalitat de la expressió i no a una part d'ella, pel que exigeix l'ús de parèntesis. Com era d'esperar, a major dificultat, major nombre d'errors o respostes incompletes (només l'alumna 2 ha assenyalat totes les respostes correctes possibles). Cal dir que la majoria d'alumnes són capaços de identificar com a correctes les opcions d) $3(e + 2)$ (22 dels 29 alumnes) i b) $3(e + 2)$ (16 dels 29 alumnes). L'opció e) $3e + 6$ només l'assenyala l'alumna 2, ja que és l'única que ha sabut aplicar, o ha reconegut l'aplicació, de la propietat distributiva. Quant als errors, el més freqüent (comés pel 24,1 %) ha sigut el d'assenyalar com a correcta la resposta f) $e + 2 \times 3$. Açò pot ser degut que pensen que només el 3 multiplica al 2, o que han oblidat el parèntesi o pensen que no cal posar-lo. Potser no recorden la prioritat de l'operació producte front a la de la suma. Tan sols dos alumnes han assenyalat a) $e + 6$ com a resposta correcta.

Pregunta 6

Notem que només han sigut capaços de respondre correctament aquesta pregunta 8 dels 29 alumnes. Tot i que molts d'ells assenyalen les opcions b) $5a+2$ i d) $2+5a$ com a correctes (el 62,1% i 86,2% respectivament), només 8 alumnes consideren l'opció a) $5a$ més 2 també ho és. Potser la dificultat que tenen és que no solen veure habitualment expressions de tipus matemàtic barrejades amb paraules del llenguatge natural i, per això, no les consideren correctes. Quant a les errades, el més significatiu és que hi ha 7 alumnes que consideren que 2 sumat a $5a$ pot representar-se com $(2+5)a$. Tot i que l'enunciat pareix prou clar i específic,

aquest és un error que es dona prou freqüent degut que el llenguatge escrit no posseeix, al contrari que l'àlgebraic, dispositius estructurals precisos (Freudenthal, 2001) i moltes vegades dona lloc a confusions. La resta d'errors comesos, com ara assenyalar $7a$ o $10a$, han sigut en casos puntuals no significatius d'alumnes que no posseeixen molt de domini de l'àlgebra.

Pregunta 7

7.b)

Quant a les dificultats presentades en la següent pregunta, cal dir que han sigut més bé escasses degut que es tracta d'una pregunta purament numèrica i fàcil de respondre per a alumnes de 3r de la ESO. El que sí que hi han hagut han sigut problemes de comprensió de l'enunciat ja que, abans de començar a realitzar el test, molts alumnes em van demanar que explicara el significat de la pregunta. Els vaig comentar que era una tasca d'assignar i que s'havien de fixar en els primers apartats de cada columna i imitar el que es fa en ells. Estaria bé, com es comenta a l'apartat de suggeriments, que per a futures aplicacions del test es tinguera en compte aquest fet per tractar de millorar la formulació de l'enunciat d'aquesta pregunta. Les errades que han comés alguns dels alumnes han sigut: assignar a 6, $x+6$ en compte de $6+2$, identificant el 6 amb el 2 i no amb la x (errada que han comés 2 alumnes) i assignar $x2$ (resposta donada per tan sols un alumne, l'alumne 27, del qual se'n parlarà més endavant).

7.c)

A l'igual que abans, la majoria d'alumnes han trobat fàcil la resolució d'aquest apartat i no han comés errors. Els alumnes que havien contestat malament l'apartat anterior, també ho han fet en aquest degut que no han comprés bé l'enunciat o han fet una assignació equivocada. Les seues respostes han sigut rx , $r2$ i $9+r$. L'alumne que ha contestat $r2$ ha sigut el mateix que en la pregunta anterior ha contestat $x2$, fet pel qual es pot deduir que considera $x+2 = x2$, expressió formada sempre per un nombre i una lletra.

7.b')

En aquesta pregunta, el nombre d'errors s'ha incrementat de forma significativa (el 34,6 % dels alumnes no ha respost correctament). Potser les dificultats han augmentat degut que a l'apartat $a')$ es mostra un monomi i a l'apartat $b')$ ens demanen un nombre, i la tendència és imitar literalment el de l'apartat anterior. És per això, que la majoria d'errors comesos han sigut per donar com a resposta $3x$ en aquest apartat (5 del total d'alumnes). Altres respostes errònies han sigut 7 (suma de 3 amb 4, interpretant que $4 \cdot 3$ és una suma i no un producte), $3+4$ (igual que en l'anterior), 8 ($6+2$, ha copiat la resposta de l'apartat $b)$), 43 (sense cap signe enmig) i $3+6$ (ha sumat 6 a 3, com a l'apartat $b)$).

7.c')

Notem que la quantitat d'errors en aquest apartat està relacionat amb el nombre d'errors de l'apartat anterior i tot és conseqüència de la interpretació que han fet de l'apartat donat com a exemple. L'error més freqüent ha sigut respondre tx (el 17,24 % dels alumnes), considerant t com 4 de l'apartat a'). Altres errors han sigut $4r$, tr , $18+r$ i $7t$. Aquests errors estan relacionats amb la resta de respostes que han donat els alumnes. Per exemple, l'alumne que ha contestat $4r$, ha assignat r (com a l'apartat c)) en compte de t i l'alumne que ha respost $18+r$, a l'apartat c) havia donat com a resposta $9+r$.

Pregunta 8

8.a.1)

En aquesta pregunta només un alumne ha comés un error, ha multiplicat 8 per 4 en compte de sumar-li 4. No presenta major dificultat ja que es tracta d'un ítem totalment numèric.

8.a.2)

Degut a l'aparició d'algun terme literal, la dificultat comença a augmentar i, conseqüentment, els errors també. En aquesta pregunta, 10 dels 29 alumnes ha comés algún error en la seua resposta. La resposta més freqüent ha sigut $9n$ que deriva de sumar els termes independents i multiplicar-los al terme literal. També hi han hagut dos alumnes que en les seues respostes (al llarg de tota l'activitat 8) han ignorat els termes literals i han escrit com a resposta el resultat de sumar tan sols els nombres. Ací han donat com a resposta 9, suma de 4 i de 5. Altres respostes equivocades han sigut $10n$, 32 i $n+5+12$.

D'altra banda, cal dir que molts alumnes han donat com a resposta $(n+5)+4$ que és correcta, però no ens permet determinar si no l'han simplificat més perquè no saben agrupar més l'expressió o perquè han considerat que deixant-ho així ja era correcta.

8.a.3)

En aquesta pregunta, augmenten encara més les errades degut que ens demanen sumar un nombre a una expressió on apareix una lletra. Hi ha respostes de tot tipus però abunden aquelles en les que es suma 4 al coeficient de $3n$ donant lloc a $7n$ o $(4+3)n$. Açò és degut que molts alumnes tenen la necessitat d'agrupar termes quan es suma, com es fa a l'aritmètica, i no se n'adonen de que fent $(4+3)n$ no estem sumant 4, sinó $4n$. A més, cal destacar que les respostes de l'alumne 27 són errònies i idèntiques a les dels apartats a) i b) (respon 32). La majoria de respostes d'aquest alumne al llarg de tot el test són incorrectes o pobres. Potser siga causa d'una desmotivació en la realització del test o a causa de que no sap interpretar bé els termes literals. Caldria analitzar el seu comportament amb més deteniment per a detectar si té algún problema. Jo no ho he pogut fer per falta de temps.

Altres respostes que s'han donat han sigut 12 (al multiplicar 3 i 4) i 7 (al sumar 3 i 4, pròpia d'un alumne que opera amb els nombres però ignora la lletra).

8.b.1)

Quant a les errades, no hi ha hagut cap especialment significativa. Sols hi ha hagut un alumne que ha respost malament (l'alumne 27) i, a l'igual que en la resta de l'apartat, respon 34.

8.b.2)

Com ja passava abans, a l'incrementar el nivell de la pregunta, augmenta també la quantitat d'errors comesos pels estudiants. Aquesta tasca és de major nivell ja que ens demanen que multipliquem una quantitat per una expressió on apareix una suma, és a dir, es tracta d'una operació combinada, pel que requereix major nivell d'enteniment. És per això que, en aquest cas, tan sols han respost correctament 11 dels 29 estudiants. Els errors més comuns han sigut $n+20$ (obté al multiplicar tan sols el 5 per 4, no la n) i respostes del tipus $20n$, $5n \cdot 4$ o $n(5 \cdot 4)$ (al considerar la suma de n i 5 com $5n$ o $n5$, i multiplicar-li 4 a aquesta expressió). També s'han donat respostes errònies com ara $9n$ (resultat de $(4+5)n$), 9 (igual que l'anterior però ignorant la lletra), $4n+9$ (multiplicant la n per 4 i sumar-li 4 a 5), $4n+5$ (al multiplicar tan sols la lletra per 5) i 34.

Pel que es pot observar a les respostes, la major dificultat que experimenten els alumnes és veure que el producte d'un nombre per una expressió polinòmica afecta a tots els membres de la expressió. Persisteix ací l'idea errònia de que an és $a+n$ i no $a \cdot n$.

8.b.3)

En aquesta pregunta els errors tornen a disminuir ja que ara la tasca consisteix en multiplicar un nombre per un monomi, i no per una expressió que conté una suma. Molts dels alumnes que abans donaven com a resposta $20n$ (és a dir, $4 \cdot 5 \cdot n$, quan se'ls demanava $4(5+n)$) ara encerten i donen un resultat correcte.

Ara bé, els errors que s'han pogut observar són: $7n$ (suma de coeficients en compte de producte), 12 (típica en els alumnes que tendeixen a ignorar la lletra) i 34.

Pregunta 9

En aquesta pregunta, la major dificultat que tenen els alumnes es veure cadascuna de les expressions com un nombre. A més, per a comparar-les, tenen tendència a fixar-se només en el terme independent amb signe (o sense ell) i ignoren la lletra. Per això, els errors que es cometien són identificar com a expressió més xicoteta n (perquè no porta nombre) o $n-3$ (perquè el nombre és el més xicotet dels que porta un menys davant) i identificar com a més gran $n-7$ (perquè porta el nombre més gran de tots, sense fixar-se en el signe).

A les entrevistes es pot observar aquest fet. En elles, a alguns alumnes se'ls demana que comparen expressions del tipus $x-7$ i $n+3$ i diguen quina és la major i quina la més menuda. És en aquest moment quan mostren dificultats ja que, en alguns casos, requereixen ajuda per a adonar-se'n que es tracta d'expressions que no es poden comparar, que a l'igual podrien ser més grans que més menudes depenent del valor que preneren les lletres.

Tal volta, si els haguérem posat una activitat en la qual aparegueren expressions d'aquest tipus però amb distints termes literals, i amb un espai per a que justificaren la seua resposta, haguérem pogut determinar millor la interpretació que fan de la lletra (si la ignoren, la interpreten com a incògnita específica...).

Pregunta 10

Ningun alumne ha sigut capaç de respondre correctament aquesta pregunta degut que és una de les que més dificultats presenta. En general, l'error més freqüent que cometen els alumnes és comparar el signe de les dues expressions, és a dir, la operació que es realitza, no les expressions en sí. La majoria no són capaços d'agafar valors i substituir per veure què passa a cada expressió, es limiten a dir que és major $2n$ perquè 2 i n estan multiplicant-se. És cert que, abans d'establir conclusions, caldria analitzar cada cas de forma particular per veure si ho han deduït a partir de la consideració de casos o si s'han basat en la simple comparació de les operacions que es realitzen i ja està.

Apareixen també respostes errònies del tipus: *Són iguals perquè els dos tenen el mateix nombre* (en alumnes que consideren que $2n=2+n$, com ja havíem comentat abans).

Cal dir que hi ha alumnes que sí que són capaços de substituir la lletra n per valors concrets, però l'error que es comet és considerar valors molt grans, pel que sempre tindrem que $2n$ és major que $2+n$.

Pregunta 11

En aquesta pregunta també apareixen algunes dificultats, ja no sols per l'aparició d'una lletra com a part de la mesura d'un costat, sinó també per les dificultats que el càlcul d'àrees presenta.

Alguns dels error que es cometen són: $A = 6 \cdot p + 2$ (manca de parèntesi per a estructurar), $A = 6p \cdot 2$ o $6 \cdot (p \cdot 2)$ o $6 \cdot p^2$ o $(p+2) \cdot 6 = 12p$ (considerant que $p+2$ és p^2 ...), $A = 6 \cdot 2 = 12$ (ignorància de la lletra)... També es produeixen respostes errònies com ara la de l'alumna 4 que contesta: $A = b+a \cdot 2$ o $P = 6 \cdot 2 + 8 \cdot 2$, en la qual s'observa que l'alumne confon el càlcul de l'àrea amb el del perímetre degut que apareix la lletra P .

Quant a l'ús de la fórmula de l'àrea, els errors que apareixen són: $A = \frac{b}{a} = \frac{p+2}{6}$, $A = 6 \cdot [(2+p) \cdot 2]$ i $A = p+6+2$, en els quals cal destacar que, tot i que s'observa que els alumnes no recorden la fórmula, sí que identifiquen bé les mesures.

Altres respostes errònies són: $A = 6^2 + p^2 + 2^2$, $A = 12 + 2 + p^2$, $A = \frac{6 \cdot 2}{2}$, $A = 1$ i $A = p \cdot 6$.

Cal dir que alguns dels errors són provocats a causa de l'aparició de la lletra com a part de la mesura de la base del rectangle i no a causa de la desconexença de la fórmula de l'àrea com es podria pensar *a priori*. Aquesta afirmació és conseqüència de comparar els resultats amb els obtinguts, per exemple, a l'exercici 19 b) que també és de càlcul d'àrees. En aquest, tan sols 5 alumnes responen malament, mentre que en aquest ho fan 18.

Pregunta 12

Passem a analitzar ara, per separat, els errors que es donen en cadascun dels apartats de l'exercici 12.

Abans de res hem de comentar que, com podem observar a les respostes, moltes d'elles estan influenciades pel context en el que es trobaven els alumnes (aprenent les igualtats notables).

A més, com en activitats anteriors, continuen produint-se errors al considerar que $2+a = 2a$. També, hi ha una certa tendència a agrupar les expressions el màxim possible, és a dir, a deixar-les com a monomis, tot i que se'ls va fer explícit que si no era possible agrupar-les més que ho indicaren.

Vegem i analitzem els errors comesos:

12 a)

En general, els alumnes no han trobat massa dificultats en aquest apartat. Els errors més comuns han sigut $7a^2$ (sumar coeficients i multiplicar lletres), $a(2 \cdot 5)$ (multiplicar nombres) i $2a + 5a$. Aquesta última resposta és la de l'alumne 27 que, com ja hem comentat en ocasions anteriors, es mostra incapaç d'operar i/o agrupar quan apareixen termes literals. Com podem veure, només es presenten dificultats en casos puntuals d'alumnes, no en general.

12 b)

Degut, com comentàvem abans, a la necessitat d'agrupar el màxim possible les expressions, en aquest apartat l'error que més han comés ha sigut $2a+5b=7ab$ (14 alumnes). D'altra banda, l'alumne 26 escriu $2a+5b=(2+5)(a+b)$. Com es pot observar a l'entrevista, respon açò per la influència dels productes notables ja que comenta que el que fa és aplicar la fórmula $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

12 c)

Degut que aquest ítem té una estructura un poc més complicada, apareixen més dificultats per a la seua correcta resolució. Un dels errors típics és escriure $a+a$ com a^2 , és per això que

apareix constantment en les respostes dels alumnes (en este cas de 12 alumnes): a^2+b i a^2b . A més, aquest fet també es reflecteix a les entrevistes. Els alumnes dubten entre el significat de $2a$ i a^2 .

Altres errors comesos són: $2ab$ (suma de a i a , $2a$; i producte per b , $2ab$; degut que pensa que $a+b=ab$), $2a+b+a$ i $(a+b)+a$ (sense desenvolupar, l'alumne suposa que no es pot agrupar més).

12 d)

En aquest apartat es mesclen les dificultats que es presenten a l'apartat a) i al b) d'aquesta mateixa pregunta. Hi ha alumnes que continuen amb la tendència d'agrupar-ho tot i donen com a resposta $7a^2b$, $8ab$, $10a^2b$... Notem que dins d'aquest grup de respostes, s'observa que hi ha alumnes que potser no reconeixen que el coeficient d'un monomi és 1 quan no porta cap nombre davant. Aquest fet s'observa en respostes com $7a^2b$ (on l'alumne ha sumat els coeficients 2 i 5, sense considerar el coeficient de a i $10a^2b$ (en el qual 10 representa el producte de 2 i 5).

Altres, agrupen sols els monomis que tenen les mateixes lletres, però ho fan malament ja que multipliquen també aquestes ($2a^2+5b$). Hi ha un alumne que dona una resposta numèrica i, en principi, aleatòria: 22. Aquest alumne té tendència a donar resultats numèrics ja que té dificultats de veure que en una solució poden aparèixer tant termes literals com nombres.

12 e)

L'aparició dels parèntesis i el fet que els coeficients dels monomis valguen ara tots 1 pareix que siguin indicadors d'una major dificultat de comprensió i interpretació de les expressions per part dels alumnes. Només 9 d'ells han sigut capaços de respondre correctament aquest apartat. Entre els errors observats, apareixen en major freqüència els següents: $a-b$ i $a-b^2$.

Un error freqüent i que he pogut observar durant la meua experiència (sobretot en els cursos més inferiors de secundària) és que alguns alumnes, associen que expressions aritmètiques com ara $-9+3-3$ equivalen a $-9+3$ ja que interpreten el signe menys com una tasca, llevar o restar, però no associada al nombre. És a dir, si "tenim -9 i $+3$ i llevem 3, ens queden -9 i $+3$ (ja que el 3 que li hem llevat ha sigut l'últim de tots)". Potser, les respostes $a-b$ i $a+b$ siguin conseqüència d'aquest raonament.

D'altra banda, hi ha alguns alumnes que veuen que la expressió no es pot simplificar més. Una de les raons per les quals responen açò pot ser per què se'ls ensenya que hi ha una certa jerarquia en les operacions i que, segons aquesta, en primer lloc el que han de resoldre és l'operació que hi ha dins del parèntesi. Com que aquesta no es pot resoldre ni escriure d'una forma més agrupada, pensen que l'expressió ja no es pot simplificar més. A més, en la majoria dels casos, estan acostumats a llevar els parèntesis quan hi ha un signe menys davant o quan hi ha un nombre multiplicant i aquest no és el cas més habitual. Potser per això troben més dificultats per a veure que es tracta d'un simple distractor.

En aquest cas, l'alumne 27 torna a donar una resposta de tipus numèric, 34.

12 f)

Tot i que aquest apartat es troba al mateix nivell que l'anterior, segons els nivells que estableix Küchemann al seu treball, aquest provoca dificultats majors en els alumnes. Ací també apareix un parèntesi que conté una expressió no simplifiable però hi ha una dificultat afegida. Apareix un signe menys que afecta tot el parèntesi, no només el primer terme. És per això que apareixen errors d'orígens ben distints com ara $4a-b$ (al simplificar la expressió sense considerar que el signe negatiu afecta tot el parèntesi), $3-b$ (al restar les lletres a : $3a-(b+a)=3a-b-a=3-b$), $2a-3a-b$, $3ab+3a$...

A més, els errors que es produïen ja en la resta d'apartats continuen: $3ab$ (a l'agrupar coeficients i lletres per tal d'obtenir un monomi), $-3ab-3a^2$ (al considerar que $3ab$ està multiplicat $-(b+a)$), $3a^2-b$ (a l'agrupar les a 's com si es multiplicaren)...

D'altra banda, el mateix alumne de sempre, torna a donar una resposta numèrica i errònia, 10.

12 g)

En aquest apartat, la dificultat que tenen els alumnes per a resoldre'l correctament és reconèixer que la suma $a+a = 2a$ i no a^2 . Durant la entrevista realitzada a l'alumna 28, es fan notar les dificultats que presenta aquest tipus de notació per a designar el producte i la suma de termes literals. Altra dificultat és no identificar la cancel·lació de termes que alguns alumnes no veuen evident quan apareixen lletres enmig. L'error més comú entre aquest grup d'alumnes ha sigut donar com a resposta a^2 , és a dir, identificar que el 4 i el -4 es cancel·len però equivocar-se de notació a l'escriure $a+a=a^2$ (el 21% dels alumnes). Altra resposta en la qual l'alumne reconeix la cancel·lació de termes ha sigut: $a+a$. En canvi, la resta d'alumnes amb respostes errònies no ho reconeix. Podem notar-ho en respostes com ara: a^2-8 (en la qual es considera que $a+a=a^2$), $8a^2$ (en la qual s'observa una tendència a agrupar nombre amb lletra), $4a^2-4$, 30...

A més, podem notar la influència dels productes notables en les respostes d'alguns dels alumnes, que contesten: a^2-16 i 4^2+a^2 , segons la fórmula de la diferència de quadrats.

12 h)

Com a la resta d'apartats, apareixen errors quant a la notació emprada per a designar la suma i el producte, així com una certa inclinació a escriure el resultat en forma de monomi, entre altres. Les respostes errònies que han aparegut són: $4a$, en la qual es menysprea el terme $-b$ (potser perquè està *restant*); $3a^2-b$, resposta donada per 6 dels 29 alumnes i en la que s'observa que no són capaços de reconèixer a com un monomi amb coeficient 1 i consideren $a+a$ com a^2 ; $3a^2b$ (igual que abans però agrupant també la b) i 40 (resposta de tipus numèric donada per l'alumne 27).

12 i)

Les dificultats que presenten els alumnes en la resolució d'aquest últim apartat són abundants i de tots els tipus. La resposta que més s'ha repetit ha sigut a^2-b^2 (el 31% dels alumnes ha contestat açò), potser degut a la semblança amb la fórmula dels productes notables: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ o a l'error de considerar $a+a$ com a^2 (i $+b-b=b^2$). La resposta a^2+b^2 deu tindre el mateix origen que l'anterior. També potser que siguen conseqüència d'una aplicació errònia de la fórmula dels productes notables o de sumar o restar malament les lletres: a^2b^2 , $a^2+(-b)^2$ i $a+b$.

Altres respostes són a^2 (en la qual es considera que les b s'annulen i $a+a=a^2$), 0 (perquè s'annulen tots els termes) i 70 .

Pregunta 13

13.a)

Aquesta pregunta no presenta moltes dificultats per als alumnes ja que és resolta amb èxit per la majoria d'ells. Tan sols tres alumnes no aconsegueixen resoldre-la bé. Les seues respostes són $45ab$ (probablement es tracta de la resposta d'un alumne que no concep que una operació amb lletres pugui donar un resultat purament numèric), 7 (alumne que, pel que ja s'ha comentat en ocasions anteriors, no es capaç de resoldre ítems en què apareixen termes literals) i $43+b+2=45b$. Aquest últim alumne associa a a el valor de 43, potser per error o tal vegada perquè necessita donar-li valor a la lletra per tal de resoldre la tasca que se li demana (o probablement ho faça perquè està acostumat a resoldre equacions o a efectuar tasques en les quals apareix una única lletra).

13.b)

Tot i que en aquest ítem el resultat és numèric, el raonament que es requereix per a trobar-lo resulta complicat per a alguns alumnes. És per això que el nombre de respostes incorrectes ha augmentat respecte l'apartat anterior. Passem a analitzar quines han sigut les errades i perquè s'han comés.

Els alumnes 10 i 23 donen com a resultat 515 , especificant al marge del full que $515=762-247$. Sembla que aquests alumnes no són capaços de trobar la relació entre la n de la primera igualtat ($n-246=762$) i la de la segona ($n-247=$ __) i veuen el signe "=" de la primera com un resultat, pel que li associen a la n de la segona el valor de 762 i, per tant, s'obté $762-247=515$.

Altres respostes errònies són 770, 565, 763 (Al fer $762-246=516$ i, posteriorment, $516+247=763$), 765 i 11.

13.c)

A priori, aquesta pregunta és semblant a la de l'apartat a), però mirant les respostes podem observar que provoca major dificultat entre els alumnes. Probablement açò és degut que en la

primera el resultat és de tipus numèric i en la segona al resultat apareix una lletra, cosa que costa de veure a alguns alumnes (tal i com ja havíem comentat).

Passem a comentar els errors que han comés. Un dels més freqüents és $8g$, potser produït a causa d'un error en la notació (consideren que $8+g$ és $8g$) o degut a la tendència (la qual es pot observar al llarg d'aquest test) a donar com a resposta un monomi. Aquesta tendència podria ser conseqüència d'un abús d'exercicis en els quals el resultat és un únic monomi. Per això als alumnes potser els resulte estrany la resposta $8+g$ i intenten escriure-la com a monomi, $8g$.

Altra resposta de tipus no numèric seria $8+f+g$, donada per l'alumna 23. La resta de respostes errònies són de tipus numèric. Un 17,24 % dels alumnes respon 9. Potser els alumnes donen aquesta resposta per ser g la lletra de l'abecedari que va després de f , (que va després de e). Llavors, com que $e+f$ dóna 8, $e+f+g$ donarà 9, que és el següent nombre després de 8. Per últim, hi ha dos alumnes que responen 12. Pareix ser que aquesta resposta és conseqüència de suposar que si $e+f=8$, doncs $e=f=4$ i aleshores g també serà 4. Per tant, responen $4+4+4=12$.

Pregunta 14

14.a)

Com en la majoria de preguntes en què el resultat és un nombre, els alumnes no presenten massa dificultats. Tan sols 5 alumnes la responen malament. Els errors comesos en les seues respostes són: restar 3 i 1 en compte de sumar (resposta 2), donar respostes com ara $u-2$ (potser perquè li pareix estrany obtenir un resultat numèric com a resultat de combinar dues equacions en les que apareixen dues incògnites distintes), $u+u=4$... A més, hi ha un alumne que respon que *u està format per dos incògnites* (l'alumna 4), probablement perquè no ha provat a substituir.

14.b)

Respecte a la pregunta anterior, les dificultats que presenten els alumnes han augmentat mínimament, probablement haja sigut degut a l'aparició d'un producte en una de les equacions. Els errors que han aparegut han sigut: considerar el producte de 3 i n com una suma (com s'observa a la resposta de l'alumna 23, $3n+1=3+4+1=8$), errades de càlcul (com ara $3\cdot 4+1=12$), errades quant al maneig de les equacions (com la resposta $m=4-n$)...

Altres respostes incorrectes que han aparegut són: $4m$, $m=13n$ (obtinguda probablement al substituir $n=4$ en l'altra equació però arrastrant la n), $m=1$ (a l'ignorar els termes literals), 5...

Pregunta 15

15.a)

Aquest primer apartat ha sigut resolt amb èxit per la totalitat de l'alumnat, llevat d'un alumne (el 27), per la qual cosa podríem considerar que les dificultats són ínfimes o reduïdes a casos

molt concrets. La resposta de l'alumne ha sigut: *res, perquè no m'ho sé*. Aquest alumne, com ja hem dit en ocasions anteriors, presenta nombroses dificultats per a tractar els termes literals. A més, degut a l'observació d'algunes de les seues respostes podríem afirmar que presenta greus problemes quant a la interpretació de les lletres, ja que és incapaç de resoldre la majoria d'ítems en els qual n'apareixen.

15.b)

En el següent apartat s'incrementen prou les dificultats respecte a l'anterior, potser perquè ara als dos costats de la igualtat apareixen els mateixos nombres i lletres, només canvia l'operació. A més, com que quan feren el test els alumnes encara no havien vist el tema d'equacions, la possibilitat de respondre l'ítem utilitzant aquest procediment quedava quasi descartada. Pel que pareix, la majoria l'han resolt per intuïció, donant valors a b .

S'han comés errades de tots els tipus, des de considerar que no es pot obtindre el valor de la b , fins afirmar que b val b (resposta donada per 4 dels 29 alumnes enquestats). Potser, tant els uns com els altres raonen d'aquesta manera perquè consideren que $2b$ és el mateix que $2+b$, i per tant o bé no es pot resoldre perquè als dos costats de la igualtat tenim el mateix, o bé la b haurà de valdre b ja que $2=2$.

Altres errades que es cometien són, per exemple, pensar que b no té un valor numèric conegut. Algunes de les respostes a la pregunta *què pots dir de b ?* en les quals es fa implícit aquest pensament són: $b=b-2$, $b=el\ que\ dóna\ la\ b+2\ que\ multiplica\ 2b$ i $b\ es\ suma\ a\ 2\ (2=b+2=2b)$.

També apareixen errades en les respostes de tipus numèric ja que alguns consideren que b és 0, 1 o inclús 4. Potser aquests casos siguen d'alumnes que consideren que la notació $b-2$ significa $b+2$ sempre, per tant, es compliria per a qualsevol valor de b .

Pregunta 16

El nombre d'errors comesos en aquesta activitat també és bastant elevat. A més, observant les respostes errònies que han donat podem afirmar que probablement la major dificultat que presenten és identificar en l'equació $r+s+t=30$ que $s+t$ val r . De fet, la totalitat dels alumnes que són capaços de fer-ho, completen amb èxit l'exercici.

Entre les respostes errònies, hi ha de tots els tipus. Algunes d'elles reflexen que el que pretenien els alumnes era tractar de trobar relacions entre les variables, tot i que no ho aconsegueixen. Aquest fet es pot observar a les respostes de les alumnes 2 i 13 que contesten a la pregunta *què podem dir de r ?* que $r\ serà\ el\ doble\ de\ s+t$ i $r\ és\ més\ menuda\ que\ r\ i\ s\ juntes$, respectivament. Potser aquestes alumnes hagen intentat, sense èxit, obtindre una única equació substituint els valors d'una en l'altra, o simplement hagen mirat les relacions entre elles per tal d'intentar trobar alguna cosa raonable, i per això responen així.

Hi ha altres alumnes que el que pareix que fan per a trobar la solució és donar valors i veure per a quins es compleixen les equacions. La dificultat que tenen és combinar ambdues equacions i, per això, alguns d'ells miren tan sols la primera d'elles i els altres només la segona,

fet que els condueix a un error, ja que si només considerem una equació hi haurà infinites solucions.

Respostes en les quals es pot observar açò són: $t=15$, $s=15$ i $r=0$ (en la que es pot deduir que potser l'alumne haja pensat que s i t han de ser iguals necessàriament), *que r , s i t valen 10...* obtingudes probablement al donar valors en la segona equació, ja que compleixen aquesta però no la primera. Al contrari que en respostes com ara $r=16+14$ o *altres nombres* que pareix que els alumnes donen valors a $r=s+t$ per a trobar la solució.

D'altra banda, hi ha alumnes que responen $r=s+t$, $r=r+s+t=30$, probablement perquè pensen que si en la primera equació ens donen $r = \dots$, en la segona el signe = també ens haurà de donar el valor d'alguna incògnita, i per això $r=r+s+t=30$.

A més, hi ha alumnes que pensen que r pot prendre distints valors ja que donen respostes com ara: $r=10$, $r=30$, $r=20\dots$ o $r=10$, 28,...

Altres alumnes són capaços d'aïllar la r en la segona equació però no de substituir, com dèiem, r per $s+t$ (cosa que no els permet trobar el valor numèric de r). Açò es pot observar en la resposta de l'alumna 28 que és $r=30-s-t$.

Pregunta 17

La major dificultat que té aquest exercici és saber combinar la equació i la inequació per tal de trobar els possibles valors de c , a més de considerar un conjunt de nombres el més gran possible. La majoria d'alumnes consideren tan sols els nombres naturals i, per aquesta raó, les seues respostes són incompletes ja que en ningun lloc ens donen cap restricció.

L'error més freqüent ha sigut considerar que c tan sols pot valdre 4, 3, 2 i 1 (el 24,13 %) o que $c=4$ (el 31,03 %). Potser molts dels alumnes que responen que $c=4$ no pensen que és l'únic valor que puga tindre c , però pensen que amb un val per respondre la pregunta.

Tan sols uns pocs alumnes han considerat que, a més, c pot valdre 0 i només un que c pot ser un nombre negatiu (*c podria ser 1,2,3,4 o un nombre negatiu*). Cal destacar que l'alumne 16 dóna com a resposta $c=4,25$ i $d=4,75$. La resposta no és correcta ja que aquest no és l'únic valor que pot prendre c . No obstant això, tampoc pareix natural pensar que siga açò el que vol transmetre l'alumne amb la seua resposta. Probablement aquest no haja entés bé la pregunta o simplement que pense que amb donar un únic valor a c queda contestada.

Els alumnes que han donat com a resposta que c només pot tindre un únic valor, com ara $c=3$ i $c=4$, potser hagen intentat trobar la solució agafant un valor i provant si verifica l'equació i la inequació i no s'hagen adonat que hi ha més d'un que les compleix.

Algunes respostes incompletes són $c=6,7,8,9,10$ i un exemple de resposta errònia és *c és un nombre més gran que d* (donada pels alumnes 23 i 28).

Pregunta 18

Aquesta pregunta a comportat molts problemes de comprensió ja que durant la realització del test molts alumnes em preguntaven què volia dir *augmentar en 2*. Per tal de no influir el més mínim en les seues respostes, els feia que es respongueren ells mateixos, guiant-los mitjançant preguntes sobre exemples concrets.

18.a)

En aquest primer apartat, l'error més freqüent ha sigut respondre $a=2b+3$ (el 20,68 % dels alumnes), per la qual cosa es dedueix que confonen augmentar en 2 per duplicar. Aquest error també pot ser conseqüència de la nomenclatura de la qual parlàvem en exercicis anteriors i que no utilitzen en el sentit correcte, així com també la resposta $a^2=b^2+3$.

Cal dir que hi ha alumnes que donen la resposta fent ús d'equacions o expressions matemàtiques i d'altres raonant com ara aquells que responen: *que ja no seria a, que és més gran el nombre, que a és el doble de b...*

Altre error prou habitual ha sigut substituir directament b per 2, és a dir, donar com a resposta $a=2+3=5$. Aquesta resposta ha sigut molt freqüent, sobretot en alumnes que solen donar respostes de tipus numèric i no conceben com a resposta aquelles en què apareixen termes literals. També han aparegut respostes en què en compte d'augmentar la b en 2 l'han augmentat en 4, és a dir, han augmentat en 2 tant b com el terme independent, 3, donant com a resposta $2b+5$. Una altra resposta en la qual s'observa que l'alumne interpreta malament l'expressió "augmentar en 2" és $a=b+3+b+3$. Ací el que fa l'alumne és duplicar b i 3.

Altres dels errors comesos ha sigut considerar que si la b augmenta en 2, el terme independent ha de disminuir en 2 perquè la quantitat quede invariant, fet que queda reflectit en la resposta de l'estudiant 11: $a=b+1$. Tot i que aquesta resposta és incorrecta, es pot observar com l'alumne atribueix al signe igual el significat d'equilibri o simetria entre les expressions d'ambdós costats.

18.b)

Si l'apartat anterior presentava serioses dificultats, aquest encara més degut que ara el terme que augmenta en 2 unitats està multiplicat per 3. Tan sols 3 alumnes han contestat correctament la pregunta.

Cal dir que els alumnes que havien contestat malament abans, ara també ho fan i les errades són molt semblants a les anteriors. A més, se n'han produït de noves. Analitzem-ne algunes. Sens dubte, les errades més freqüent han sigut calcular què li passaria a f si sumarem $2g$ (resposta $f=(3+2)g+1=5g+1$ donada per 5 dels alumnes) i calcular què valdria f quan g fos 2 (resposta $f=3\cdot 2+1=6+1=7$).

Altres errades quant a la interpretació de l'expressió *augmentar en 2l a g* són $f=3\cdot 2g+1=6g+1$ (en la que l'alumne multiplica $3g$ per 2), $f=6g-1$ (resposta donada per l'alumne 11, el qual

potser responga açò perquè pensa que si augmentem g , f ha de disminuir per a què es mantinga la igualtat), respostes com ara $f=(3g+1) \cdot 2=6g+2$ i $f=3g+1+3g+1$ (en les que els alumnes han multiplicat tota la expressió per 2), $f=(5+g)+1$, $f=3+2+1=6...$

També apareixen errades i carències en el raonament d'algunes respostes com ara: *que f és el triple que $3g$, que el resultat seria més gran, que ja no seria f , que f és menys gran...*

Pregunta 19

Com ja passava a la pregunta 11, els errors més freqüents són deguts, per una banda a que no recorden la fórmula de l'àrea d'un quadrat i, per altra a les dificultats causades per l'aparició de termes literals com a mesures.

19.a)

Aquesta pregunta presenta menys dificultats que les posteriors degut que la figura està dividida en quadrats i no cal saber cap fórmula per al càlcul de l'àrea. Així i tot, pareix que la majoria dels alumnes la intenten resoldre emprant dita fórmula.

A més, com que ací les mesures són totalment numèriques, l'únic error que cometien és el càlcul de l'àrea degut que no recorden bé la fórmula. Els errors comesos són: confondre la fórmula de l'àrea d'un quadrat amb la d'un triangle ($A = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$), calcular el perímetre en compte de l'àrea ($A=4 \cdot 2+3 \cdot 2$), donar com a resposta $A=4 \cdot 3 \cdot 2=24$, $A=4^2+3^2=25$ (emprar el Teorema de Pitàgores), $A=4 \cdot 3 \cdot 12$ (probablement ha escrit 12 perquè hi ha 12 quadradets)...

19.b)

Aquest apartat també és de tipus numèric però ara no hi ha cap quadrícula per a ajudar-los a trobar la fórmula (tot i que establint una comparació amb l'apartat anterior es podria deduir). És curiós que, al contrari del que es podria pensar, hi ha hagut més alumnes que han encertat aquest apartat que l'anterior, tot i que no podria considerar-se significatiu (han contestat correctament només 2 alumnes més que abans). Potser en aquest cas, açò es dega a l'ús abusiu d'exemples típics proporcionats als llibres de text en els quals s'ensenya als alumnes a calcular l'àrea de les figures sense necessitat d'emprar cap quadrícula, tan sols aplicant una fórmula.

L'error més significatiu ha sigut respondre $A=10^2+6^2=100+36=136$ (per 3 alumnes que ja a la pregunta anterior calculaven l'àrea elevat al quadrat les mesures dels costats i sumant). Potser açò ho fan perquè han intentat aplicar el Teorema de Pitàgores a les mesures dels rectangle o bé perquè no recorden bé la fórmula del càlcul de l'àrea d'un rectangle i els sonava aquesta. Hauriem d'entrevistar-los per a que ens explicaren els seus motius.

Altres respostes errònies han sigut $A=6 \cdot 2+10 \cdot 2$ (per l'alumna 4, que ja calculava l'àrea així a l'apartat anterior) i $A=64$ (per l'alumne 27).

19.c)

Tot i que en aquest ítem no apareixen nombres, els alumnes que responen correctament els apartats anteriors no presenten dificultats per a resoldre aquest. Es tornen a repetir els errors que es feien abans pels alumnes que no responien bé. Aquests errors són: calcular el perímetre del rectangle en compte de l'àrea ($A=n \cdot 2 + m \cdot 2$, per l'alumna 4), sumar base i altura del rectangle en compte de fer el producte, potser per una confusió en la fórmula ($A=n+m$), elevar al quadrat les mesures dels costats ($A=n^2+m^2$), aplicar la fórmula del càlcul de l'àrea d'un triangle ($A=\frac{m \cdot n}{2}$, alumne 25, com ja feia abans a l'apartat a)), $A=n^2 m^2$ (alumne 27)...

19.d)

En aquest apartat, el nombre de respostes incorrectes ha augmentat significativament. Potser perquè als alumnes es resulta difícil veure que una mesura no té perquè ser una lletra o un nombre, també pot ser una mescla dels dos (com és el cas).

Entre els errors més comuns està el d'escriure l'àrea com el producte de totes les mesures, $A=5 \cdot 2e=5e2=10e$, potser causat per la tendència a donar el resultat en forma de monomi. També hi ha alumnes que responen la pregunta correctament però se'ls oblida escriure el parèntesi, pel que el resultat no és correcte, com passa en $A=5 \cdot e+2$.

Els errors que es donaven en la resta d'apartats persisteixen. Alguns d'ells són $A=5 \cdot 2+5+2 \cdot 2$, $A=5^2+2^2+e^2=25+4+e^2=29+e^2$ (elevar al quadrat totes les mesures), $A=5^2 \cdot (e+2)^2$ (elevar al quadrat les mesures de la base i de l'altura) i les premisses de perquè podrien produir-se són les mateixes que explicàvem anteriorment.

A més, hi ha dos alumnes que donen respostes numèriques ignorant la lletra com són: $A=\frac{5 \cdot 2}{2}=5$ (en la que s'empra la fórmula de l'àrea del triangle, no la del quadrat) i $A=10$ (en la que l'alumne ha multiplicat sols 2 per 5).

Pregunta 20

Aquest ítem no presenta cap dificultat de resolució per als alumnes ja que es resolt amb èxit per tots ells. Potser siga perquè es tracta d'un ítem que no requereix el tractament amb termes literals, tots els termes són nombres naturals. Tan sols un alumne deixa en blanc la pregunta, l'alumne 27.

Pregunta 21

21.a)

Aquest primer apartat tampoc presenta dificultats excessives, de fet 26 dels 29 alumnes el resolen amb èxit. Potser açò és degut que a l'inici d'aquest es dona una pista de com calcular el perímetres. Tan sols es cometien errors com ara e^3 (és a dir, en compte de sumar,

multipliquen) i $3g$ (resposta influïda, probablement, per la pista que dona l'exercici, en la qual la lletra que s'emptra per a exemplificar és g). Cal dir que els alumnes que responen e^3 potser tenen la idea de que el perímetre és la suma dels costats però, per a ells, $3e=e^3$ (error prou freqüent, com em pogut observar en exercicis anteriors).

21.b)

En aquest apartat les dificultats augmenten ja que hi ha dos tipus de lletres distintes. A més de les errades típiques, com són per exemple errors de notació o d'agrupació de tots els termes, també es cometten errades d'elevat a algun exponent en compte de fer el producte ($P=h^4+t$, $P=th4...$), emprar una sola lletra ($P=4t+1t$), equivocar-se de lletra ($P=5g$).

A més, un alumne ha contestat que $P=t+h^2+h^2$. Potser aquest alumne, a banda de considerar $h+h$ com h^2 , no concep la existència de h^4 o li resulta estrany i per això agrupa les h de 2 en 2. Açò podria ser conseqüència de que no ha vist moltes expressions d'aquest tipus al llarg del seu procés d'aprenentatge.

21.c)

En aquest apartat hi ha una dificultat afegida respecte a l'anterior: es mesclen nombres amb lletres. És per això, que el nombre d'errades augmenta i només la meitat dels alumnes responen correctament. L'error més freqüent ha sigut donar com a resposta $P=2u+5^2+6$ (el 20,7 % dels alumnes). És curiós que escriguen el 5 al quadrat però no la u , ja que hi ha tant dos u com dos 5. Potser siga perquè els resulta més estrany veure u^2 que $2u$. Cal destacar que en l'estudi fet per Küchemann (1981) aquest és també un dels errors més freqüents entre la seua mostra d'alumnes.

Altres dels errors són $P=6+5^2+u^2$, $P=16+u^2$, $P=6\cdot5\cdot5\cdot u^2$, $P=6+5^2+2^2$ i $P=5^2\cdot u^2\cdot6$, per les mateixes raons que abans.

21.d)

Al contrari que en els apartats anteriors, ara ens demanen que calculem l'àrea de la figura però coneguent la mesura dels costats, i no el nombre de costats com abans (que ens diuen que és n).

Les respostes errònies en aquest apartat són ben diverses. Tot i que l'error més freqüent ha sigut comptar els costats de la figura de la qual tan sols hi havia part d'ella dibuixada, anem a distingir entre dos tipus de respostes: les que són totalment numèriques i les que fan referència als n costats.

Les respostes numèriques que han donat han sigut: $P=2$, $P=14\cdot2$, $P=2\cdot2\cdot2=6$, $P=2^3$, $P=2^7$, $P=2^{11}$ i $P=2 \times 12$. Notem que l'alumne que ha escrit $P=2$ potser tinga el concepte de que n és molt gran i desconegut, és per això que li escriu al 2 un període. Altres respostes mostren que el que ha

fet l'alumne ha sigut comptar els costats de la figura dibuixada (o els vèrtexs) i multiplicar-los per 2, o bé elevar 2 al nombre de costats

Entre les respostes errònies no numèriques es troben les següents: $P=2^{14} \cdot n2$, $P=2 \cdot x$, $P=2 \cdot 13+n2$, $P=6+2n$, $P=2^3+n$, $P=14+2n$, $P=n$ i $P=2 \cdot 14n$. Notem que en la majoria d'elles es compta part de la figura i després es considera que té n costats. A més, potser alguns alumnes escriuen $n2$ en compte de $2n$ degut que ara és al contrari que abans, ens donen la mesura (que abans no era coneguda i es posava darrer) però no el nombre de costats.

També cal destacar que probablement l'alumne que ha respost $P=2 \cdot x$ i no $P=2 \cdot n$ ho haja fet degut a la influència de la notació que s'utilitza més freqüentment. El més habitual és escriure allò que no saps, la incògnita, emprant la lletra x .

Pregunta 22

22.a)

Tot i que aquest ítem és de tipus numèric, presenta més dificultats de les normals, tal vegada ocasionades per problemes de comprensió de l'enunciat. Les errades comeses són: 55 (al restar-li 2 a 57 i no 3, resposta influenciada per l'enunciat), 285 (resultat de multiplicar 57 per 5, també ocasionada per una mala comprensió de l'enunciat), $57 \cdot 2=114$, n (resposta d'un alumne que probablement no conega la resposta correcta i empra la lletra n , a l'igual que en l'apartat anterior, per a designar la quantitat desconeguda) i 3.

22.b)

En aquest apartat es dupliquen els errors respecte a l'anterior (han fallat el 48,28 % dels alumnes), probablement a conseqüència de que ara la dificultat ha augmentat: el nombre de costats ja no és conegut. Les respostes errònies que han aparegut són $3-k$ (restar-li k a 3 en compte de 3 a k), $2-k$ (el mateix però per a 2), $k-2$ (restar-li 2 a k en compte de 3), $-3k$, $2k$,...

Altres respostes han sigut k , x , L i n , de les quals es pot deduir que potser els alumnes no sabien quin era el resultat o pensaven que era desconegut, per això associen una lletra (k és la mateixa de l'enunciat, x la notació més habitual per a la incògnita, L la lletra següent de k i n la incògnita que empràvem a l'últim apartat de l'exercici anterior).

També s'han donat respostes de tipus numèric com ara 0 i 4.

Pregunta 23

23.a)

Aquesta pregunta no presenta massa dificultats en la majoria dels alumnes. Un únic alumne respon *de vegades* i explica que *sols quan valguen el mateix totes les lletres* la expressió serà la mateixa (alumne 26). Es pot observar a la entrevista d'aquest alumne que el que ell havia fet

era pensar-ho sense substituir ni res. Quan se li suggereix que ho faça se n'adona tot sol de que la seua resposta és incorrecta.

23.b)

Al contrari que en l'apartat anterior, aquesta pregunta provoca moltes dificultats als alumnes ja que identifiquen les lletres com a incògnites específiques i no com a nombres generalitzats. És per això que tenen dificultats per a veure que M i P poden ser iguals *de vegades*, quan $M=P$, ja que veuen que M i P són lletres distintes i per tant els seus valors sempre hauran de ser nombres distints.

Pregunta 24

Com que les úniques dades que ens proporciona el problema són J i P , la majoria d'alumnes les identifiquen com a nombres específics, responen $J+P$. L'error que més es comet és respondre JP (per 4 dels 29 alumnes), degut probablement a un error de notació o a una interpretació errònia de l'enunciat.

Potser el que més crida l'atenció són les respostes dels alumnes 23 i 27 ja que presenten dificultats per a la interpretació de les lletres correctament en aquest apartat. Les seues respostes són: $J+P$, *perquè el nombre de caniques no el fica* (per l'alumna 23) i $J+P$, *però no puc escriure'l perquè falten dades* (per l'alumne 27). Tot i que donen la resposta correcta, $J+P$; per a ells J i P són uns nombres no fixats, desconeguts, no reconeixen que hi ha exactament J i P caniques.

Pregunta 25

25.a)

En aquest primer apartat, apareixen dificultats per a interpretar l'enunciat i escriure'l en forma d'equació. Potser aquestes dificultades estiguen justificades pel context en el que es troba la pregunta (no molt habitual entre els alumnes), per deficiències en la comprensió lectora o per la falta de treball de la capacitat d'interpretació d'enunciats verbals i transformació a enunciats algebràics.

De tota manera, anem a citar quines han sigut les errades en les respostes dels alumnes a aquesta pregunta i a intentar analitzar quines han sigut les causes d'aquestes.

L'error principal ha sigut que els alumnes han contestat donant expressions quan el que se'ls demanava realment eren equacions. Alguns exemples són $70W+2h$, $70+2h$ (raonament correcte però en forma d'expressió, no d'equació), $W+h$ (un dels més freqüents), $W+2h$, $h \cdot W$, $(2+h)+W$, $70+2x$ (en la que s'emptra x com a incògnita i no h)... Potser aquests alumnes no hagen sigut capaços d'escriure una equació perquè no interpreten el signe igual en el sentit

d'equilibri entre les expressions d'un costat i altre, sinó com a signe que indica tasca a realitzar o ens dóna un resultat.

Dels alumnes que han escrit equacions cal destacar les respostes següents: $W+h=70+2$ i $70+2=W$ en les quals els alumnes igualen lletres a nombres, tal vegada perquè pensen que han d'igualar el que no coneixen al que sí coneixen. També hi ha respostes en les quals no apareix cap incògnita $70+2=72$ i en què el que apareix a un costat de la igualtat és el resultat del que apareix a l'altre, com ara $70+2h=140h$ i $W+h=Wh$ (tot i que els resultats no són correctes).

Cal destacar que, com afirmen Kieran i Filloy (1989), sovint alguns alumnes donen la equació escrivint el resultat del càlcul al costat dret del signe igual, fet que es pot observar en algunes d'aquestes respostes errònies com ara: $W+2h=70$, $70+2=72$ i $70+2h=140h$.

25.b)

Tot i que a l'apartat anterior apareixen dificultats per a trobar l'equació que ens dóna el sou total de Maria i aquest apartat depèn de l'anterior, aquest és resolt correctament per més alumnes que l'a). Per tant, d'ací es dedueix que aquests alumnes resolen l'apartat a partir de l'enunciat verbal i no substituint directament en l'equació. A més, l'interpreten correctament quan apareixen nombres però no quan les quantitats són lletres.

Entre les errades destaquen, sobretot les de tipus literal, en les que els alumnes responen donant expressions on apareixen tant lletres com nombres, com són: $W+8$, (donada pels alumnes que en l'apartat anterior responien $W+h$), $W+4h$, $W+2\cdot 4$, $70W+4h$, $W+h+2+2+2+2=x$ (igual a x , suposadament, per indicar que no podem conèixer el resultat d'aquesta expressió)...

I algunes de les respostes numèriques són: *74 euros al mes*, $4\cdot 2=8$ euros, $3\cdot 360$ i $2+2+2+2=8$ (potser aquest alumne dóna aquesta resposta perquè interpreta 4 vegades 2. A més, ho fa així perquè, com es pot observar a la resta del test, no reconeix que $2+2+2+2$ siga el mateix que $4\cdot 2$).

Cal destacar que en la majoria dels casos existeix una certa relació entre les respostes d'aquest apartat amb les que els alumnes donen en l'anterior.

Pregunta 26

Tan sols 5 alumnes són capaços de respondre correctament aquesta pregunta, la resta presenten dificultats quant a la interpretació de la expressió. Les respostes errònies que han donat els alumnes es poden dividir en tres grups, els que responen que el significat de la expressió és: *els 4 pastissos són c euros i les 3 coques són c euros* (donada pels alumnes que interpreten que c és el preu dels 4 pastissos i no d'un, i el mateix per a les coques), *hem comprat 4 pastissos de preu p euros i 3 coques de preu c euros* (tan sols 2 alumnes responen açò, és correcte però els falta enllaçar ambdós idees per a formular la resposta correcta), *hem comprat 4 pastissos i 3 coques* (resposta més freqüent entre els alumnes, donada per 13 d'ells. Interpreten que $4p+3c$ és el total de pastissos i coques)

Potser aquestes respostes hagen estat influenciades com a conseqüència de llegir $4p+3c$ literalment, com comenta Küchemann (1981): 4 pastissos i 3 coques.

Com es pot observar a les entrevistes, amb les preguntes corresponents es pot guiar a l'alumne a trobar per ell mateix la resposta correcta.

Pregunta 27

Aquesta pregunta ha resultat prou complicada per a la majoria d'alumnes, tot i que l'han resolt més dels esperats. Cal destacar que aquesta activitat resulta interessant ja que els alumnes encara no sabien resoldre equacions de tercer grau quan van realitzar el test i van haver d'emprar la intuïció i el raonament per a fer-ho.

També hem de destacar que s'han produït moltes errades i alguns alumnes han donat respostes de forma aleatòria, com ara els alumnes 14, 17 i 18 que responen 25, 31 i 57, respectivament (justificant la seua resposta dient que no saben resoldre-ho).

Hi han hagut alguns dels alumnes que han intentat resoldre l'equació emprant fórmules matemàtiques com ara $(a+b)^3=a^3+3ab+b^3$, (seguint una mena de paral·lelisme amb la fórmula del binomi de Newton però ara per al cub, la qual cosa és incorrecte). Aquest és el cas dels alumnes 1 (que respon que $x = \frac{346}{12}$) i 15 (que respon $\frac{348}{30} : 4$).

Altres alumnes han contestat raonant i intentant trobar la relació entre una equació i l'altra. Algunes de les seues respostes, errònies, i les justificacions que fan els mateixos alumnes són: *multipliquem per 6 el resultat, 2094* (aquesta alumna multiplica per 6 el que per a ella és el resultat, 349, ja que la x del primer cas és 6), *18 perquè $3x$ significa multiplicar la x per 3 que és $3 \cdot 2=6$, 6 perquè multiplica a 3 i x ha de ser 6*.

Pregunta 28

Aquesta pregunta també presenta moltes dificultats entre el grup d'alumnes. Les més importants són dificultats de comprensió i d'interpretació de l'enunciat per tal de transformar-lo en una equació o resoldre'l aritmèticament. Però, sobretot, el que més complicat resulta és veure que la solució no té perquè ser única, que poden existir distints valors que complisquen l'enunciat.

Quant a les respostes incorrectes, podem trobar-ne de molts tipus: alumnes que donen una equació equivocada, com ara l'alumna 29 que escriu $2b+2r=90$, *he comprat 2 llapis rojos i 2 blaus*, també podem trobar errors de no donar una resposta completa, com és el cas de l'alumna 28, que pensa que és suficient amb donar com a solució un cas particular per al qual es compleix (escriu ha comprat 10 llapis rojos $6 \times 10 = 60$ i ha comprat 6 llapis blaus $5 \times 6 = 30$, ja que $60+30=90$)...

La resta de respostes són d'un tipus similar al que acabem d'anomenar. També hi ha alumnes que responen aleatòriament, com ara l'alumne 23 que diu que *compra 4 llapis de cada color*, o com l'alumne 16 que diu que en compra 15 rojos i 28 blaus.

Cal destacar que un dels errors més freqüents ha sigut plantejar-se l'equació general $r+b=90$ i donar valors a r i s per a què la suma done 90, com ha sigut el cas dels alumnes 10 i 21 que responen $r=45$, $b=45$ i $r=50$, $b=40$, respectivament.

2.2. ENTREVISTES SOBRE EL TEST

Alumne: Nº 26

Sexe: Xic

Data de naixement: 09/11/1997

1) A 4.

E: D'acord, en aquesta primera pregunta perquè dius que quan $a = 3$, $4a$ és igual a 4?

A: Ho sabia en eixe moment però ara...

E: No saps perquè ho has posat?

A: Si que ho sabia... Mmm si $a = 3$... No m'enrecorde, és algo de 3 sumant-li a...

E: Ara ho faries d'una altra manera?

A: A veure 4 per a que són 3, 4×3 què són 12.

E: Molt bé, ara sí que ho hagueres fet correctament.

2) a) $5 + n$, d) $5 + 5 + 5 + 5 + 5$.

E: Val, passem a la segona pregunta. Què significa $5n$?

A: Doncs $5n$ és igual a $5 + n$...

E: A la pregunta anterior no m'havies dit que $4a$ era $4 \cdot a$? Llavors, $5n$...

A: Doncs seria $5 \cdot n$!

E: Aleshores està malament aquesta.

A: I esta la tinc bé, 5 voltes 5.

E: No, perquè és 5 voltes...

A: Ah no! És 5 voltes n , no 5 voltes 5! Seria correcta la e) $(n + n + n + n + n)$.

E: Alguna de les altres opcions seria correcta?

A: No, cap d'aquestes.

3) a) $e \times 3$, e) $e + e + e$.

E: La següent.

A: Què significa $e3$...? Doncs $e \times 3$... i 3 voltes e , la e). És correcte perquè és igual com esta (assenyala la pregunta anterior)

E: Molt bé. I hi ha alguna més ahí que siga correcta.

A: Mmm... No... Ah, $3 \times e$!

E: Molt bé, estic d'acord amb tu.

4) c) $n + m$, d) $25 + 26$.

E: Què passa en la pregunta següent? A què és igual nm ?

A: Doncs a $n \times m$, i a 25×26 .

E: I perquè has marcat les altres?

A: No sé, eixes no estan bé.

E: Ara dius que és $n \times m$, perquè?

A: Perque entre dues lletres si no posa res és perquè hi ha una multiplicació, com en les preguntes 2) i 3), que si no hi havia res multiplicàvem.

E: Estic d'acord. Perquè dius que és també 25×26 ?

A: Perque el signe és el mateix, s'estan multiplicant.

E: I si en compte de 25×26 tinguérem 4×10 seria correcte?

A: Si, també.

E: Llavors, no és necessari que siguen dos nombres consecutius.

A: No, en que siga el mateix signe es correcte.

L'alumne veu nm com el producte de dos nombres qualsevols, no necessàriament consecutius. La resposta e) 25×26 no és correcta ja que nm no significa 25×26 (que és el que ens estan preguntant), tot i que sí que és un cas particular.

5) a) $e + 6$, d) $3(e + 2)$, f) $e + 2 \times 3$.

E: La següent!

A: (Pensa durant una estona) És correcta la d), 3 multiplicat per $e + 2$...

E: Molt bé...

A: I la f)... Sí, la f) és correcta també!

E: Estàs segur? No li falta alguna cosa?

A: Ah, es veritat. Està mal perquè faria falta un parèntesi. La c també seria... $3 \times e2$... Ah no! Li falta un '+' entre e i 2.

E: I la primera seria correcta?

A: No. Però la b) $3 \times (e + 2)$ sí que ho seria perquè és el mateix que açò (assenyala la opció d) $3(e + 2)$) però llevant-li el signe de multiplicar.

E: Llavors, quedem en que les correctes són la b), la d) i, alguna més?

A: No, ja està.

E: A veure, desenvolupa la expressió $3 \times (e + 2)$.

A: (Ho escriu en un full) Aleshores seria $3e + 6$, la e) també estaria bé.

E: Molt bé!

6) b) $5a + 2$, d) $2 + 5a$, g) $(2 + 5)a$.

E: A veure, llegim ara la pregunta 6.

A: La b) l'he posat bé... la a) també seria correcta no? Perque és igual que la b) però el + escrit en lletres.

E: Si, hi estic d'acord. Alguna altra més?

A: La c? No, la c) no. La d) $2 + 5a$.

E: Alguna més?

A: I... i esta (g) (2 + 5)a)? No, esta no porque seria 10a.

E: Segur?

A: Ah no, dóna 7a, aquesta no és tampoc.

E: Clar, perquè aquí estem sumant 2 al 5, no a la a, és a dir, estem sumant 2a a 5a en compte de sumar 2. Comprens?

A: Si si.

7b) 6 + 2, 7c) r + 2.

E: Explica'm aquí més o menys què és el que has fet.

A: Doncs... Com x, x + 2 aquí (en la b)) seria 6 + 2 i en la c), r + 2.

E: Molt bé.

7b') 3 + 4, 7c') 4x.

E: I en aquesta?

A: x és igual a 4x, doncs 3, 3 +4...

E: Estàs segur? Perquè?

A: 4 3?

E: Anem a veure, i què és 4 3? Quan teniem 4x què significava açò?

A: Què era 4·x, ah! Serà 4·3 que és 12.

E: I en c'), perquè has posat 4x?

A: Perque m'he equivocat. La resposta seria 4t.

8a) 12, (n + 5) 4, 3n + 4.

E: Explica'm què has contestat en cada cas i perquè?

A: En el primer 12, 8 + 4. En el segon (n + 5) + 4.

E: Posdries arreglar açò un poc més?

A: Sí! Seria 5n + 4.

E: Si? Estàs sumant lletres amb nombres!

A: Aleshores no puc arreglar-ho més perquè hi ha un parèntesi.

E: I no podries llevar-lo?

A: Si, no?

E: T'enrecordes quan es posava parèntesi? Per a separar dos signes que estan junts, per a multiplicar un nombre a una expressió o per a canviar el signe a tota la expressió. Aquest és un d'aquests casos?

A: No

E: Llavor, pots llevar el parèntesi i sumar, no és així? Escriu com quedaria.

A: Si, donaria 5n + 4.

E: Ho entendries millor si tinguérem $x + 5 + 4$?

A: Sí, seria $9x$.

E: A veure, tu en les equacions què fas? Sumes nombres per una banda i lletres per altra. Doncs ací el mateix.

A: Donaria $9 + n$?

E: Així sí. Entens ara el que estava diguent?

A: Sí, ara sí. El que passa és que jo t'havia dit que el 9 anava davant ($9n$) i va sumant, no és una multiplicació.

E: Clar. I en l'última, dius que dona $3n + 4$. Pots agrupar-ho més?

A: Mmm... Si, $7n$? No! És igual que abans! Com ací hi ha termes amb lletres i altres que no en tenen, no es poden agrupar!

La conversació continua. Li pose exemples fins que li queda clar que no es poden sumar lletres i nombres. M'extranya que fallara ací ja que a classe quan ix a la pissarra a resoldre equacions ho fa bé. Potser si haguera posat com a lletra la x en compte de la n ho haguera fet millor.

8b) $32, 5n \cdot 4, 3n + 4$.

E: Explica'm aquestos.

A: El primer és molt fàcil, $8 \cdot 4 = 32$. El segon $5n \cdot 4$...

E: Perquè?

A: No, està malament perquè ens el donen n i 5 sumant-se i jo els he posat multiplicant-se ($5n$).

E: Llavors, com seria?

A: Doncs seria $(5 + n) \cdot 4$ que dona $20 + 4n$.

E: Molt bé! I en l'últim? At demanen que multipliques $3n$ per 4 i has escrit $3n + 4$.

A: Clar, aleshores el + és un x .

E: Si, i què donaria $3n \times 4$?

A: $12n$?

E: Si, molt bé.

9) La més gran: $n + 4$, La més xicoteta: $n - 7$.

E: Perquè dius que $n + 4$ és la més gran i $n - 7$ la més xicoteta?

A: La més gran perquè es positiu i el positiu és més gran que el negatiu. I el nombre més major dels positius és el +4 i el més xicotet dels negatius el -7.

E: Val, és correcte però si jo et preguntara quin és el més gran $n + 4$ o $x - 7$, que em respondries?

A: $n + 4$ és més gran.

E: Perquè? No té perquè, el nombre al que li sumes o li restes no és el mateix. Vegem un exemple: Si n fora 1 tindríem $1 + 4 = 5$ i si x fora 20, $20 - 7 = 13$ que és més gran. Llavors, en el cas que estan preguntant-nos ací sí que pots dir que el més gran és $n + 4$ i el més menut $n - 7$ ja que estem sumant o restant a la mateixa quantitat.

A: Ah val, ja ho entenc.

10) $2n$ perquè té la lletra davant i això fa que siga més gran.

E: Què és més gran, $2n$ o $n + 2$?

A: Crec que està bé però no està molt ben explicat. El que volia dir en la explicació és que en un s'ha multiplicat i en l'altre s'ha sumat. Em vaig fer un embolic al contestar!

E: I com ho vas deduir?

A: Doncs per exemple, si la n és 8 i multiplique per 2 és igual a 16 però si fique 8 més 2 és igual a 10.

E: Això és correcte, però si jo agafe ara n com a 1...?

A: Doncs es queda igual, és 1.

E: Multiplica ara per 2. $2n$ que valdria?

A: $2n$ seria 2.

E: I n més 2?

A: Seria 3

E: Llavors, si te n'adones en aquest cas és al revés, és major n més 2 tot i que no és una multiplicació. I si agafem n com a 2?

A: $2 \cdot 2 = 4$ i $2 + 2 = 4$. Són iguals! I aleshores quin és més major? Depén del nombre?

E: Clar, molt bé! Quan n siga 2 seran iguals, quan la n siga més xicoteta que 2 serà més gran n més 2 i quan n siga major que 2 (igual a 4, a 5, a 8...) seran més gran $2n$, d'acord?

A: Si però era molt complicat.

11) Àrea = $P + 6 + 2$.

E: Explica'm la resposta que has donat en aquest exercici. Com ho has pensat?

A: L'àrea és que no me la sabia molt bé. Però està bé? No, no?

E: Disme-ho tu.

A: Seria p per 6, no?

E: Mira-ho bé.

A: $P \cdot 2 \cdot 6$?

E: A veure, anem a pensar-ho bé. Com es calcula l'àrea d'un rectangle?

A: Ah no! Seria p més 2 per 6.

E: Mostra'm com ho escriuries.

A: (Ho escriu en un full correctament: $A = (p + 2) 6$)

E: Molt bé, perquè l'altura del rectangle és 6 i la base p més 2, no?

A: Sí.

12) a) $7a$, b) $(2 + 5)(a + b)$, c) $a^2 + b$, d) $2a^2 + 5b$, e) $a - b^2$, f) $3a^2 - b$, g) $4a^2 - 4$, h) $3a^2 - b$, i) $a^2 - b^2$.

E: Després de llegir l'enunciat, em pots dir si la primera resposta és correcta?

A: Sí que ho és, perquè si tinc 2 a's i 5 més, en tinc 7 en total.

E: Molt bé, i la següent? Com ho has pensat?

A: En aquesta vaig respondre açò entre parèntesi... Per la fórmula aquesta $(a + b) - (a - b)$...

E: I t'enrecordes aquesta expressió a què era igual?

A: Sí, donava a elevat a 2 i b elevat a 2.

E: I ací tens alguna cosa elevada al quadrat menys alguna cosa elevada al quadrat?

A: No.

E: Llavors no pots aplicar la fórmula. És més, la fórmula no és com tu me l'has dit exactament. És aquesta (li la escric a un foli). Aleshores, com ho faries?

A: Doncs posaria 7... (Es queda pensant) No sé.

E: No podries deixar-ho així i ja està?

A: Sí, tens raó. No es pot sumar perquè no està la mateixa lletra.

E: Això sí! Aquesta expressió no es pot simplificar més perquè les lletres són distintes. No es poden sumar 2 pomes amb 5 peres i dir que tens 7 pomes i peres. Tens 2 pomes i 5 peres i ja està

A: Val.

E: Passem ara a la c).

A: En la c) vaig posar açò perquè hi ha 2 a's i una b. a^2 més b.

E: I creus que està bé?

A: Jo crec que sí.

E: A veure, fes-la ara davant de mi (La escriu en un paper). Què faries primer?

A: Doncs $a + a$ i després més b. I això dona $2a$ més b.

E: Molt bé! Veus com si que saps fer-ho!

A: Ara en la d) he fet el mateix error. Seria $3a$ més $5b$.

E: Estic d'acord. I en l'apartat e)?

A: Ací seria a menys $2b$.

E: En aquesta ja no estic d'acord. Si tinguérem $(a - 2) + 2$, què donaria?

A: $-2 + 2$... 0 !

E: Aleshores, si tenim $-b + b$ que dona?

A: Negatiu, se fa negatiu. Perquè positiu i negatiu, negatiu.

E: No m'has dit que $-2 + 2$ dona 0? I $-3 + 3$?

A: Zero també.

E: I $-b + b$?

A: Donaria a solament.

E: Clar, les b's desapareixen. Positiu i negatiu fan negatiu quan multipliqués dos nombres, no quan els sumes. (Continue amb els exemples fins que entenc que sap diferenciar-ho)

E: Què seria $3a - (b + a)$?

A: Seria $3a - b$, no?

E: I la a de dins del parèntesi?

A: Es que se suma i se resta. Se'n va.

E: Recordes que feïem quan hi havia un menys davant d'un parèntesi? Canviavem el signe de tot el de dins, no és així?

A: Ah, que no se resta! Aleshores seria $4a - b$.

E: Fixa't i escriu-ho al full. Pas per pas.

A: (Ho escriu en un paper) Ací has dit que es canvia el signe? Seria ... $3a - b - a$, $4a - b$!

E: Si tinc 3 pomes i en regale una, quantes m'en queden?

A: Dos, aleshores $2a - b$.

E: Ara sí. Ja vas pillant-ho?

A: Sí, ja.

E: La següent.

A: $a + 4 + a - 4$... Dóna zero tot!

E: Què faries ací? Agrupem lletres amb lletres i nombres amb nombres, no?

A: Sí, aleshores seria $2a$ i ja està.

E: I l'apartat g) com seria? Està bé?

A: Mmm... No, està malament. Seria $4a$ menys b .

E: Molt bé. I la i)?

A: Ací he aplicat la fórmula (la de les igualtats notables) però no se pot perquè és un $+$, no un x . Seria $2a - 2b$.

E: No exactament. Fixa't, què faries primer per a resoldre açò?

A: Multiplicar? Ah no, llevar els parèntesis. Donaria $a + b + a - b$, és a dir, $2a$ perquè b i $-b$ dóna zero.

E: Molt bé.

13a) 45

E: Per què dius què $a + b + 2 = 45$?

A: Doncs si $a + b$ són 43, al sumar-li 2 fan 45.

E: D'acord, és correcte.

13b) 761

E: Per què has contestat 761 en aquest apartat?

A: Perquè com $n - 246$ és 762, si li llevés uno més a n donarà uno més.

E: Molt bé.

13c) 12

E: I en aquesta, per què dius que dona 12?

A: Perquè $e + f$ és igual a 8 i jo crec que e és 4 i f és 4 i si són 8, $e + f + g$... si poses $4 + 4 + 4 = 12$.

E: I la g és necessari que siga igual a la f ?

A: No, per exemple, també pot ser 6 més 2...

E: I si f fora 6 i e 2, quin seria el resultat?

A: De la g ?

E: No, de $e + f + g$.

A: Ah, doncs... (es queda pensant) podria ser també 9. Clar, el que vullgues.

E: Si, i 100, 200... L'única cosa que saps és el que suma $e + f$, no? El que val la g podem saber-ho a partir de les dades que ens donen?

A: No.

E: Llavors, quina serà la resposta? (No respon) El que saps és que $e + f$ val 8, l'únic que pots fer és abreviar-ho, no? Que podem posar aquí?

A: Doncs... Es que hi ha molts tipus de nombres... Pots posar el que vullgues!

E: Però la g no saps què val!

A: Aleshores seria zero.

E: No, si no la saps no és zero!

A: x!

E: Val, però en compte de x podem posar g no?

A: g és igual...

E: No! Mira, com ens diuen que posar $e + f$ és el mateix que posar 2, a la expressió $e + f + g$ ho substituïm i queda...

A: $8 + g$?

E: Exacte. Eixa és la resposta correcta. $8 + g$ és un nombre!

14a) Que la u és 2.

E: Com has resolt l'apartat a)?

A: A veure (agafa el full i escriu), u és igual a 3 i v . Com v és 1 i ahí $v = 3$, la u valdrà 1.

E: Esque ahí no tens que v és igual a 3, sinó que $v + 3$ val el mateix que u . A més, la v és 1 i ens pregunten què val la u . Si v és 1, quant val $v + 3$?

A: $3v$.

E: No, ens donarà un nombre! Si la v és 1, $v + 3$ serà el mateix que $1 + 3$ que és 4.

A: Això és el que val la u ?

E: Clar! (Li ho escric en el full per a que ho veja més clar i li ho explique)

A: Ah si! La v és com si fora un 1, ara ja ho entenc!

L'alumne no veu que la lletra puga ser un nombre.

14b) Que m és 1.

E: Ara el següent, que valdrà la m si m és $3n + 1$ i n és 4? És paregut a l'anterior.

A: Que la m és 12... No, $12 + 1$ són 13. Que la m és 13!

E: Molt bé, ho has entès bé.

15a) Que a és 3.

E: Què pots dir de a si $a + 5 = 8$?

A: Que a és 3.

E: Com ho has tret?

A: Si li restes 8 a 5 dóna 3... També pots anar provant.

E: Tu com ho vas fer?

A: Restant-li 8 a 5.

E: Però si li restes 8 a 5 dóna -3! Si te n'adones, es tracta d'una equació. El que hi ha als dos costats ha de ser igual. Per tant, com a 5 li falten 3 per a ser igual a 8, la a valdrà 3.

A: O el 5 passaria restant a l'altre costat del igual.

E: Molt bé!

15b) Que és 0.

E: Perquè dius que és 0?

A: No està bé, seria... No ho sé.

E: Si en compte de b fora x, com trauries el que val?

A: Resoldre la equació... Hauria de dividir entre 2.

E: No, encara no. Això es faria al final, quan ja tens aïllada la x. Primer passaríem totes les x a un costat i els nombres a l'altre, no? (Li ajude a resoldre la equació i al final troba que x ha de ser 2).

A: Val.

16) Que és 10.

E: Ara, perquè dius que r és 10?

A: (El torna a llegir) Es que és igual que el d'abans (es refereix al 13c)), poden ser moltes coses.

E: Poden ser moltes coses però ens diu que r és el mateix que $s + t$. Tu no pots canviar ací (en $r + s + t = 30$) $s + t$ per r?

A: Sí.

E: Tindríes $r + r$...

A: És 15!

E: Molt bé, podria ser 10?

A: No, perquè ens diu que un número el sumes dos vegades i et dóna 30. És el 15.

17) Que c és 4, 3, 2, 1.

E: Què pots dir ara de c si $c + d$ és igual a 10 i c és menor que d?

A: Que c pot ser 4, 3, 2, 1... i 0!

E: I pot ser també 2,5?

A: També!

E: I -2,7?

A: No, té que ser positiu, no?

E: No, en cap moment diu que siga positiu! O sí?

A: La suma ha de ser 10!

E: Sí, però si c fora -2 i d fora 12 també donaria 10 i c continuaria sent més petit que d

A: Però hi ha una suma!

E: Però pot ser una suma de nombres negatius.

A: Ah, val.

E: Podria ser la c 5, 1?

A: No perquè ja se'n passa.

E: I 5?

A: No, tampoc.

E: Aleshores, què podem dir de c?

A: Que poden ser tots però que no passen de 5.

E: Molt bé. Aleshores c serà menor que 5.

18a) Que és més gran.

E: (Llegim la pregunta) Dius que serà major el nombre? Com ho has fet?

A: Si b es fa més gran, el número també.

E: Com de més gran?

A: (Torna a llegir el problema)

E: Ho entens? Que significa augmentar b en 2?

A: Que també pot ser 2b.

E: No, significa que a b li sumem 2. Si en comptes de b posem $b + 2$ en la expressió, com serà a?

A: Que la a serà més gran.

E: Com de més gran?

A: 2 vegades més gran.

E: 2 vegades més gran no, 2 unitats més gran voldràs dir. Augmentarà en 2 també, no?

A: Sí, això volia dir.

18b) Que és menys gran.

E: Ací perquè dius que és menys gran?

A: No, això està malament.

E: Seria més gran o més xicotet?

A: Més gran.

E: Clar, perquè si a banda de sumar-li a g 2 multipliques el resultat per 3 i li sumes 1 encara donarà més gran la a, no?

A: Si.

Em dedique a explicar-li com podria fer per a veure quant augmenta a al augmentar b en 2, però no ho entén i ho deixa córrer perquè pense que li resultarà un poc massa complicat.

19) a) $A = 4 \times 3$, b) $A = 6 \times 10$, c) $A = m \times n$, d) $A = 5 \times e + 2$.

E: Llig aquesta pregunta i dis-me si has fet totes les respostes bé.

A: A veure, l'àrea és base per altura. La a) és 4×3 que és 12, la b) $6 \times 10 = 60$ també està bé. La c)... Sí, $m \times n$ perquè ara n és l'altura i m la base. Esta no l'he fet bé (es refereix a la d)). Esta és com l'altra... És e més 2 per 5...

E: Molt bé, està escrit correctament?

A: Ah, el parèntesi! (l'escriu on toca)

20) $P = 9 + 1 + 10 + 2 = 22$.

E: En aquesta...?

A: En aquesta ho he sumat tot i m'ha donat 22 ja que el perímetre és la suma de tots els costats.

21) a) $P = e + e + e$, b) $P = t + h + h + h + h$, c) $P = 6 + 5 + u + u + 5$, d) $P = 2 \times 12$.

(A l'exemple que proporciona l'enunciat de l'exercici escriu: $P = 4g = 9 + 9 + 9 + 9 = 36$.)

E: Abans de fer-te cap pregunta, per què escrius baix de l'enunciat açò? ($P = 4g = 9 + 9 + 9 + 9 = 36$)

A: Perquè ací posa 9, 9, 9 i 9 (assenyala la figura).

E: Ja, però açò són g's! A més, tu mateix ho has posat $P = 4g$! O açò és un 9 també?

A: No, és una g. Suppose que $4g$ ho copiaria de l'enunciat que ho diu, i després miraria el dibuix.

E: O siga, que t'has confòs. A més, açò era l'enunciat, no hi havia que contestar res!

A: Ah no? Je je.

Ací es nota que l'alumne té la necessitat de veure el perímetre com un nombre enter, no es capaç de veure que també pot donar-se en funció d'una lletra.

E: Val, doncs explica'm com has pensat les següents preguntes.

A: La a) com és el perímetre que és la suma dels costats, els sume.

E: I podries simplificar més la expressió?

A: Sí, seria $3e$.

E: Molt bé. I la següent, com l'has fet?

A: Igual, he sumat tots els costats.

E: I simplificant la expressió, dóna...

A: També pot ser $t + 4h$.

E: Molt bé, i aquesta?

A: Esta bé, seria $6 + 5 + 2u + 5$. (Ara ha agrupat les lletres)

E: Podries sumar també els nombres?

A: Sí, quedaria $16 + 2u$.

E: I l'últim apartat? Perquè poses 2×12 ?

A: Perquè m'havia imaginat ahí que hi havien 12 i ja està.

E: Tu no pots imaginar-te que hi ha 12! Hi ha exactament n , ho diu ací.

A: Aleshores seria $2 \times n$.

E: Exacte!

Torna aparèixer ací la imperiosa necessitat que té l'alumne de donar-los valors a les lletres

22) a) 23 diagonals, b) x diagonals.

E: Que em dius d'aquesta resposta, com ho has pensat?

A: 23, ho vaig fer amb la calculadora.

E: I què vas fer?

A: Vaig fer: si sume 5 li'n reste 2, li'n sume 5 i li'n reste 2...

E: Però no li has de restar 2, sinó 3. A més, se li resta al nombre de costats, al total.

A: Reste 3 i ja està? 54!? Què fàcil!

E: Sí, t'havies fet un embolic! I ara, si en compte de 5 o de 57 tinc k costats...?

A: Doncs serà $k-3$.

E: Clar!

23a) De vegades. Quan valen el mateix totes.

E: Ací et pregunte quan són certes les igualtats. De vegades? Per què?

A: Es que... Per exemple, si és $2 + 2 + 2$ és igual a $2 + 2 + 2$... ixe no val. Però si poses $1 + 3 + 4$...

E: Açò valdria $4 + 1 + 3$. I no seria el mateix?

A: Sí.

E: Hi ha A, B i C als dos costats de la igualtat, el que passa és que estan col·locades de forma desordenada. Però seria el mateix, no?

A: Si, aleshores sempre seria igual!

23b) Mai.

E: I en aquest?

A: Buff... Este és molt difícil.

E: En un costat tinc el mateix que en l'altre llevat de en un que tinguem una M i en l'altre una P. Dius que mai són iguals? Perquè?

A: Perquè M no és igual que P.

E: I el valor de la M no pot ser igual al valor de la P?

A: No, per això posa la P i no la M.

E: Però per exemple, quan tenim un sistema d'equacions tenim x i y i les dos poden valdre el mateix, no? I són lletres distintes.

A: Ah...

E: Aleshores, ací la M i la P també poden ser iguals de vegades, estàs d'acord amb mi?

A: Si...

E: Aquest era un poc difícil de veure.

No continue explicant-li-ho perquè el temps s'està acabant i encara queden algunes preguntes.

26) $4p + 3c$ és el cost del que ha comprat, la quantitat.

E: En aquesta pregunta em dius que és el cost i la quantitat, en què quedem? Quina de les dues és la correcta?

A: Jo crec que la quantitat.

E: Doncs no, és el cost. Perquè? Cada pastís val p euros, si en comprem quatre valdran...?

A: Ah $4p$, i les coques $3c$. Aleshores és el preu, ja m'enrecordo!

27) $x = 3$. Explicació: $(3x + 1)^3 + x = 349$ <--- a)

$$(3x + 1)^3 + 3x = 34 \text{ <--- b)}$$

$3 + 3 = 6 \longrightarrow x = 3.$

E: Val, explica'm ara com has trobat que x és 3.

A: Buff, em vaig fer un embolic! A veure, $3x + 1$ són $4x$...

E: $3x + 1 = 4x$? Açò no pots fer-ho, perquè són lletres i nombres!

A: Doncs no sé, no m'enrecordo. Jo anava fent i ho vaig trobar.

Passem a l'última pregunta perquè queden segons per a que sone el timbre.

28) $(b \cdot r)^2 = 90$ cèntims.

$$(5 \cdot 6)^2 = 30^2 = 90.$$

E: En aquesta última pregunta, m'agradaria saber perquè has contestat açò. A veure, llig el problema

A: (El llig) A veure, si llapis blaus n'has comprat 5 i rojos 6, substituïm en la formuleta i ens dona bé.

E: Primer, la formuleta eixa don l'has tret? I segon, compra b llapis blaus i r rojos, 5 i 6 són els preus de cadascun.

A: La formula... Seria per els productes notables o algo d'això... I com jo vaig posar 30 i donava bé, ja està.

E: O siga, que et vas arreglar la formuleta per a que donara bé, no?

A: No sé, no sé d'on vaig traure el 2 però supose que m'ho inventaria...

E: Val, moltes gràcies per haver vingut!

1) 4a ---> $4 \cdot 3 = 12$.

E: A veure, si a és igual a 3, a què és igual 4a. Has posat açò, perquè?

A: Donc perquè quan una lletra té un nombre davant vol dir que es multiplica. Aleshores, com a és igual a 3, doncs 4 per 3, 12.

E: Molt bé.

2) a) $5 \times n$.

E: Val, passem a la segona pregunta. Què significa $5n$?

A: Que 5 multiplica a la n.

E: Val, i d'ací, apart d'e la resposta que has donat, hi hauria alguna altra que fora correcta o sabries dir-me'n alguna altra que no està ahí?

A: Sí, jo al principi havia posat $n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n$ però al final vaig pensar que no.

E: Val, i perquè no? Si fas $n \cdot n$...

A: Clar, és n^2 .

E: I $5n$ què significa?

A: Que el 5 multiplica a la n.

E: I si tenim 2 per 7, això no és el mateix que sumar 2 vegades 7 o 7 vegades 2? Pensant d'aquesta manera, vories correcta alguna resposta més de les que hi ha ací?

A: Sí, sumar 5 vegades n que seria la e)

E: La d) $5 + 5 + 5 + 5 + 5$ seria bona també?

A: Tam... No, perquè no sabem quin nombre és n.

E: Molt bé.

3) a) $e \times 3$, c) $3 \times e$.

E: La següent, què significa e^3 ?

A: Que la e multiplica al 3 i el 3 multiplica la e, és el mateix (referint-se a les opcions a) i c)).

E: Molt bé, alguna més que siga correcta?

A: Doncs que la e està 3 vegades sumada (opció e)). Ja no en podem assenyalar cap més, perquè no sabem la e què val i no podem posar el 3 sumat e vegades.

E: Molt bé, seria això e vegades 3 i no com la opció d) que és 3 vegades 3. Estic d'acord amb tu.

4) b) $n \times m$, e) 25×26 .

E: Ara la pregunta 4, què significa nm ?

A: Que la n es multiplica per la m. I ahí (assenyala l'opció e)) si la n fora 25 i la m 26 es multiplicarien.

E: Val, ací el que passa és que et pregunta què significa nm , 25×26 no és el mateix que nm sinó és un cas particular i, per tant, no hi ha que assenyalar-lo. Potser la pregunta no està

massa ben formulada i per això no ho has entès bé. Però, per exemple si tinguérem 2×100 també seria un cas particular de nm ?

A: Sí, clar.

E: Ho siga, entens que no tenen perquè ser dos nombres consecutius?

A: Clar, perquè nm siguen les lletres que siguen representen dos nombres qualsevols.

E: Val, estic d'acord amb tu.

5) d) $3(e + 2)$.

E: La següent! Quina expressió utilitzaries per a representar $e + 2$ multiplicat per 3?

A: Doncs aquesta (la d)) perquè el 3 multiplica a la e i al 2.

E: D'acord, i alguna altra?

A: No, jo crec que no...

E: Estàs segur? Fixa't i escriu al full si et fa falta.

A: Esta (Escriu $(e + 2) \cdot 3 = 3e + 6$). Ah! Aquesta (la e)), perquè multipliques la e per 3 i el 2 per 3, $3e + 6$.

E: Molt bé. I la b) podria ser?

A: La b) no, perquè multipliques la x ...

E: A veure, desenvolupa la expressió $3 \times (e + 2)$ (La desenvolupa). Val, es que no és una x , és el signe de multiplicar.

A: Ah! Doncs sí, també seria correcta! Jo em pensava que eren ics... I la f)??? No, la f) no perquè el 3 només està multiplicant el 2.

E: Correcte.

6) a) $5a$ més 2, b) $5a + 2$, d) $2 + 5a$.

E: A veure, llegim ara la pregunta 6. Quina escriuries per a representar 2 sumat a $5a$?

A: La a) perquè és $5a$ més 2, la b) perquè és el mateix i 2 més $5a$ (la d)) perquè és el mateix també.

E: Alguna altra més?

A: No.

E: Molt bé.

7b) $6 + 2 = 8$, 7c) $r + 2$.

E: Explica'm més o menys què és el que has fet en cada cas.

A: Doncs... Com a x li he sumat 2 ($x + 2$), ací al 6 també li he sumat 2 que dóna 8. I a la r també li he sumat 2, $r + 2$.

E: Molt bé. I l'última la podries arreglar un poc més?

A: No, no es pot perquè no podem sumar una lletra i un nombre.

7b') $3 \cdot 4 = 12$, 7c') $4t$.

E: I en aquesta?

A: En aquesta, la x es multiplica per 4 i en b') el 3 també l'he multiplicat per 4 que dóna 12 i la t també, $4t$.

E: Molt bé, facilet no?

A: De moment sí.

8a) 12 , $n + 9$, $3n + 4$.

E: Explica'm què has contestat en cada cas i perquè?

A: En el primer a 8 li he sumat 4 que dóna 12, en $n + 5$ al sumar-li 4 dóna $n + 9$. I per últim, $3n + 4$, i no es pot simplificar més.

E: Molt bé, ja que tens lletres i nombres i no es poden agrupar.

8b) 32 , $4(n + 5) = 4n + 20$, $12n$.

E: La següent, multiplicar n per 4 pot escriure's com $4n$. Explica'm com ho has fet als casos següents.

A: El primer és 4 per 8 que dóna 32, l'altre és $n + 5$ entre parèntesi per 4 (per a que es multiplique tot) que dóna $4n + 20$. I ací, el 4 es multiplica per $3n$ que dóna $12n$.

E: Multipliques els nombres i ja està. Perfecte.

9) La més gran: $n + 4$, La més xicoteta: $n - 7$.

E: Ací et preguntava que em digueres quina de les expressions era la més gran i quina a més menuda. Explica'm perquè has contestat açò.

A: Bé, la més gran $n + 4$ perquè el terme independent és major que tots i la més xicoteta $n - 7$ perquè se resta.

E: Val, i si jo ara et diguera... Tinc $n + 4$ i $x - 7$, sabries dir-me qui dels dos és més gran?

A: Eixe (assenyala $n + 4$)

E: Segur? Si et fixes, si agafem $n = 1$ seria $1 + 4 = 5$ i ací si agafe la x igual a 20, $20 - 7$...

A: És 13, clar.

E: Aleshores, en aquest cas 13 és més gran, és a dir, $x - 7$. Llavors, el que passa ací és que en aquest cas (el que ens diuen a la pregunta) la més gran sí que és $n + 4$ i la més menuda $n - 7$, però perquè?

A: Perquè la n sempre és el mateix nombre i has de mirar sols el que li sumes o li restes.

E: Molt bé.

10) És major $2n$ perquè a n se li multiplica 2, en canvi, $n + 2$ és menor perquè a n se li suma 2.

E: Què és major, $2n$ o $n + 2$?

A: Doncs $2n$ perquè el 2 se multiplica a la n i l'altre se suma 2 i n .

E: Val, però com ho has pensat?

A: Doncs perquè com multiplicar... Si tu ara poses per exemple que la n fora un 3, 2 per 3 són 6 i al sumar dóna $2 + 3 = 5$.

E: Val, i si la n fora un 1?

A: 2 per 1 és 2 i 2 més 1... Ai, dóna 3!

E: I si ara agafem $n = 2$?

A: $2n$ seria 4 i $2 + 2$ també, serien iguals.

E: Exacte, serien iguals. Aleshores generalitzant...

A: Si la n fora 2, serien igual, si la n és 1...

E: Voldràs dir si la n és més xicoteta que 2, perquè per a 1.999 també es compliria, no?

A: Clar! Doncs, per a n menor que 2 és major $n + 2$ i per a n més gran que 2, $2n$ és el major.

11) Àrea = $6 \cdot (2 + P) = 12 + 6P$.

E: Com escriuries l'àrea d'aquest rectangle?

A: Com l'àrea és base per altura, la base és $p + 2$ i l'altura 6.

E: Molt bé, i ho has desenvolupat...

A: Sí, i dóna 12 més $6p$.

12) a) $7a$, b) $2a + 5b$, c) $2a + b$, d) $3a + 5b$, e) a , f) $2a - b$, g) $2a$, h) $4a - b$, i) $2a$.

E: En la següent pregunta ens donen com a pista que $a + 3a$ pot escriure's com $4a$. Explica'm com has pensat les teues respostes.

A: Ací se sumen els nombres i després les lletres, vull dir, sumem els nombres i la lletra es queda igual.

E: Això sí. I en la b)?

A: Doncs $2a + 5b$, eixa es queda igual perquè no són la mateixa lletra. No se poden sumar.

E: Molt bé, la següent.

A: Esta dóna $2a + b$.

E: El parèntesi eixe no influeix per a res o sí?

A: No. Perquè no té cap menys ni res davant. Aleshores, lleves el parèntesi, sumes i restes i ja està.

E: Molt bé. Explica'm ara la d).

A: La d), $2a$... Doncs sume les a 's que dona 2 i una 3 i el $5b$ el deixes igual.

E: Molt bé, llavors la resposta és correcta.

A: I en la e) la a està positiva però com hi ha una b negativa i una positiva es queda igual, zero. Aleshores queda la a solament.

E: El parèntesi el lleves, no? No el consideres?

A: Lleves el parèntesi i $-b + b = 0$. Aleshores sols ens queda la a .

E: La f)...

A: Ahí 3a i com hi ha un menys davant del parèntesi canvien els signes. Aleshores dona $-b -a$ i per tant serà $2a - b$.

E: Molt bé.

A: I ací (assenyala la g)) sume les lletres que dona $2a + -4 + 4 = 0$. Queda $2a$ solament.

E: Perfecte. Explica'm ara la h), com l'has fet.

A: Doncs 3a i a són 4a i el $-b$ que està sol, el posem també ahí. Quedaria $4a - b$.

E: Molt bé! Ara l'última.

A: Ací els parèntesis els lleve i com que no hi ha cap menys es queden iguals. Se sumen el a i el a i la b i $-b$ zero.

E: I el a i el a dona...

A: Dona $2a$.

E: Molt bé, perfecte.

13a) 45

E: A veure, en la següent per què dius què $a + b + 2$ és igual a 45?

A: Sí, és 45, perquè a i b són 43 i si li sumes 2 dona 45.

E: D'acord, és correcte.

13b) 761

E: Ací, com ho has fet per a traure que és 761?

A: Doncs... Perquè ací aquest és més major (es refereix que el 247 és major que el 246), aleshores a l'altra part serà un menys. És a dir, com li estem llevant un més que abans, dona un menys.

E: Molt bé, així sí. Un altre mètode que hagueres pogut utilitzar és resoldre la equació i ja amb el valor de la n substituir en l'altra. De tota manera ho has fet molt bé, així és molt més curt.

13c) $8 + g$

E: I en aquesta, per què dius que dona $8 + g$?

A: Perquè $e + f$ dona 8 i aleshores $e + f + g$... Com g no té d'això se queda.

E: Molt bé. Com que no sabem el valor de la g, la deixem igual.

14a) Que $u = 4$.

E: Ara, què pots dir de u si és igual a v més 3 i v val 1? Com ho has resolt?

A: Doncs canvies la v, la substitueixes per 1 i aleshores u és igual a 1 més 3, és a dir, 4.

E: Correcte.

14b) Que $m = 13$.

E: Ara el següent...

A: I en aquest com n és 4 poses el 4 en la n i fem 3 per 4, 12 i una dóna 13, que és el que val la u.

E: Molt bé, perfecte.

15a) Que $a = 3$.

E: Ara, una altra molt faciletta. Què pots dir de a si $a + 5 = 8$?

A: Doncs que la a val 3 perquè passes el 5 allí a l'altra part i se queda la a asoles. Aleshores el 5 és negatiu i $8 - 5$ dóna 3.

E: És a dir, que en aquest cas has resolt la equació.

A: Sí.

E: També podies vore-ho recordant la definició d'equació, és a dir, que el que hi ha a un costat i a l'altre del igual ha de valdre el mateix. Llavors, que li falta al 5 per a valdre 8?

A: Val, doncs 3.

E: Exacte. És una altra manera de veure-ho.

15b) Que $b = 2$.

E: La següent, perquè dius que b és 2? Com l'has fet?

A: Doncs com... No ho sé.

E: Creus que el resultat està bé?

A: No... Ah, sí perquè si la b val 2, $2 + 2 = 4$ i si la b poses 2, $2 \cdot 2 = 4$.

E: Molt bé, però com podries traure que b és 2? Provant...? Com creus que ho vas fer?

A: Jo suppose que resoldria la equació, passaria la b a l'altre costat i després al dividir dóna $b = 2$.

16) Que $r = 15$.

E: Ara, perquè dius que r és 15?

A: Este pareixia que no, però també era facilet.

E: Sí, dis-me què has fet?

A: A veure, s més t és r i aleshores... (es queda pensant) Aleshores, s i t tenia que donar r...

E: Dóna r, no és que haja de donar r.

A: Sí, ah val. Sí, doncs pose en lloc de s i t r en l'altra equació i tinguem $r + r = 30$. Aleshores r ha de valdre la meitat, 15.

E: Ha de ser precis 15 o podria ser un altre nombre?

A: No, perquè ha de ser el mateix nombre perquè les dues r's són iguals.

E: Molt bé.

17) Que $c = 4$.

E: Ara aquesta, què pots dir ara de c si $c + d$ és igual a 10 i c és menor que d ?

A: Doncs aquesta... Com la c era menor que d , podia ser o... L'he fet provant. Podria ser 4 i 6, 3 i 7, 2 i 8...

E: I ací poses que c és 4...

A: Sí, igual haguera pogut posar 3 perquè la d seria 7.

E: Ah, d'acord. Et referies a que pot ser 4, no?

A: Sí.

E: Però a l'enunciat et pregunten què pots dir de c . Açò vol dir que digues el màxim que sàpigues sobre c . Què pot ser 4, que pot ser 3...

A: Ah, d'acord.

E: c pot ser 2,5?

A: També.

E: I c pot ser... -5?

A: -5... (Es queda pensant) No ho sé... -5...?

E: Si la c fora -100, podriem trobar un nombre que fera que la seua suma donara 10?

A: Mmm... Aleshores la d seria 110, no?

E: Molt bé! I continuaria complint les condicions que ens donen?

A: Sí, també.

E: I... Podria la c ser 100?

A: No... Perque ha de sumar, i 100 més qualsevol nombre no dona 10.

E: Però la d també podria ser negativa. Abans la c era negativa.

A: Ah, també...Sí, però ja no seria major que c .

E: Aleshores, quina és la conclusió a la que arribem? Què és el màxim que podem dir?

A: Que... Que la c ha de ser més xicoteta que la d .

E: Sí, però això ja ens ho diuen a l'enunciat. Haviem dit que podia ser 2, 3, 4, 2.5, -100... però 100 no, ni tampoc 7... I 5?

A: Tampoc, perque d seria el mateix que c . Seria quan c és més xicoteta que 5!

E: Molt bé!

18a) Que $a = (b + 2) + 3$, $a = 5 + b$.

E: Val, a la següent, què passa amb a si b augmenta en 2? Explica'm com ho has fet.

A: Doncs... Ah, clar. Que si b se suma 2, com hi ha un 3 se suma 3 i queda $5 + b$.

E: D'acord. Podries dir-me ara en quant augmenta la a quan la b augmenta en 2?

A: En 2, la a augmenta en 2 també.

E: Molt bé.

18b) Que $f = 5g + 1$.

E: I ací en la b)? Què has fet?

A: Ací... El mateix, que g augmenta en 2. Com $3g$ és el mateix nombre he sumat 2.

E: Per això has posat ací un 5, perquè a 3 li has sumat 2?

A: Sí.

E: Però això no és augmentar en 2 la g , és

A: És augmentar $3g$.

E: Exacte. Has de sumar 2 unitats a g , com has fet a l'apartat a, no sumar $2g$ a $3g$!

A: Ah, val. (Agafa el full) Seria 3 per $g + 2$.

E: Clar! Continua escrivint.

A: Donaria... $3g + 6 + 1$. Està mal el que havia posat.

E: Molt bé! Llavors, en què has augmentat la f ?

A: En 6.

E: Clar, si et fixes augmenta les 2 unitats de la g per 3 que és el coeficient d'aquesta. No sé si m'explique.

A: Sí, sí.

E: Si jo tinguera ara $f = 4g + 100$ i augmentara en 2 la g , en què augmentaria la f ?

A: Mmm... En 4 per 2, en 8?

E: Correcte!

19) a) $A = 4 \cdot 3$, b) $A = 6 \cdot 10$, c) $A = n \cdot m = nm$, d) $A = 5(e + 2) = 5e + 10$.

E: D'acord, passem a la següent pregunta. Dis-me com ho has fet en cada cas.

A: Ahí, base per altura, que és 4 per 3.

E: Que dóna..?

A: 12.

E: Ho hagueres pogut posar ja que ho sabies. En fi, la següent.

A: Ací 6 per 10 que dóna 60.

E: Molt bé.

A: En esta igual, n per m que és nm i ací sí que ho he posat. I l'última... 5 per $e + 2$ que dóna $5e$ més 10.

E: Per què?

A: Perquè 5 és l'altura i la e més 2 és la base.

20) $P = 10 + 9 + 1 + 2 = 22$.

E: A veure, aquesta és faciletta. Calcula el perímetre de la figura següent.

A: Doncs ací és sumar-ho tot i ja està.

E: Molt bé.

21) a) $P = 3e$, b) $P = 4et$, c) $P = 2u + 5 + 5 + 6$, d) $P = 2n$.

E: Ara dis-me, com has pensat aquesta? Explica'm cadascun dels casos.

A: Ací igual, el perímetre que era sumar-ho tot. Aleshores és 3 voltes e que és 3e.

E: Molt bé. I en la b)?

A: Ací també era sumar-ho tot. Poses $h + h + h + h$ que és 4h... Ui, he posat una e, m'hauria despistat. I la t. Seria 4ht... No, 4h més t.

E: Això sí. I ací d'on t'has tret la e i la multiplicació?

A: No ho sé! He he.

E: Suppose que et confondries.

A: I ací també ho he sumat tot. u més u que és 2u, 5 més 5 que són 10 i 6, 16. Seria 2u més 16.

E: Val, no ho havies simplificat tampoc però sabies fer-ho. I la d)...?

A: Esta és...

E: Et diu que cada costat mesura 2 i hi ha n costats. Ara la lletra no és la mesura d'un costat, sinó el nombre de costats que té.

A: Clar. Aleshores, com no saps el nombre de costats, si sabérem el nombre de costats...

E: Sí que el saps, hi han exactament n.

A: Val, si. Aleshores com el que mesuren és 2 i hi ha n, la mesura la multipliques pel nombre de costats i donar 2n, que és sumar-ho tot.

E: Molt bé.

22) a) 54 diagonals, b) $k - 3$ diagonals.

E: Llegim el següent. Com l'has pensat?

A: Doncs ací en l'apartat a) li he restat 3 a 57, 54. I en l'altre a k, què és el nombre de costats, li he restat 3 també i dóna $k - 3$.

E: Perfecte.

23a) Sempre.

E: En la 23 et pregunte quan són certes les següents igualtats. Explica'm la primera.

A: Ací $A + B + C$ és el mateix perquè l'ordre dels factors no altera el resultat.

E: Molt bé, no altera el resultat en la suma. En la divisió per exemple sí eh. Ves amb compte!

A: Sí, bé... He he.

23b) Mai.

E: En la b), dis-me perquè has contestat que mai són iguals.

A: Doncs en aquest em vaig fer un embolic.

E: Per què?

A: Perquè vaig pensar també que si la M fóra P donaria però...

E: I després que et va fer canviar d'opinió?

A: Perquè... (Es queda pensant) Perque no és la mateixa lletra.

E: Ja, pe la x i la y tampoc és la mateixa lletra, i de vegades valen el mateix, no?

A: Aleshores si que podria ser...

E: Sí, estàs segur? Explica'm el que penses.

A: Es que ara crec que si la M fora la P sí que podria ser el mateix.

E: Clar, eixa és la resposta correcta. De fet, si recordes quan estem resolent un sistema d'equacions i tenim alguna cosa sumant a un costat i a altre, no es poden llevar?

A: Sí.

E: Doncs ací, la L i la L se n'anirien, i també la N i la N. Quedaria que $M = P$, és a dir, per a que siga igual un costat i l'altre M i P han de ser iguals.

A: Clar. Aleshores estava bé al principi.

24) J + P.

E: La següent. Ens pregunten quantes caniques tenen entre Joan i Pere. Explica'm perquè has posat J + P.

A: Sí. Doncs com Joan en té J i Pere en té P, en tindran J i P, la suma de les que tenen els dos.

E: Molt bé.

25) a) $70 + 2h = W$, b) $70 + 4 \cdot 2 = W$, $W = 78 \text{ €}$.

E: Llegim ara aquest que era un poquet embolicat i explica-me'l per veure si l'has entés.

A: Doncs, et diu que Maria cobra 70, doncs posem 70, i a més li paguen 2 euros més per cada hora extra, i cada hora extra és h, aleshores 2 per h. També et diu que el sou és W, per tant és 70 més 2h igual a W.

E: Molt bé. I ara, quin serà el sou de Maria si ha treballat 4 hores extra?

A: Doncs substitueixes el 4 en la h i serà 70 més 4 per 2, que és 78.

26) $4p + 3c \rightarrow 4p$ significa que 4 pastissos valen p i que 3 coques valen c.

E: La següent. Com has pensat aquesta pregunta?

A: Dons que han comprat 4 pastissos que val p euros i 3c que són que han comprat 3 coques.

E: A veure, 4p què seria?

A: El preu, el que ens han costat els pastissos. I 3c el que ens han costat les coques.

E: Així sí. Aleshores, 4p més 3c què seria?

A: El que em comprat i el que ens ha costat.

E: El que hem comprat o el que ens ha costat? Quina de les dues?

A: El que ens ha costat.

E: Ara sí.

27) $x = 2$. Explicació: Perquè en la primera la x val 6, aleshores en la segona per a que la x valga 6 hi ha que multiplicar per 2.

E: En aquesta ens donen dues equacions i ens pregunten quin valor de x farà vertadera la segona sabent que el valor que compleix la primera és $x = 6$. Dius que el valor és $x = 2$. Explica'm perquè.

A: Doncs ací, com la x val 6... A veure... Sí, com la x val 6, en la de baix posa que val 3... Ah, val. Ací (en la primera equació) et posa que la x val 6 i ací (en la segona) et posa que la x està multiplicada per 3. Aleshores, per a que dóne 6, has de multiplicar per 2.

E: Molt bé, per a que $3x$ siga igual a 6, la x ha de ser 2. I com vas començar a fer-ho, ho vas mirar a simple vista i ja està o com?

A: No, al principi em vaig fer un embolic perquè quan ho vaig veure vaig començar a fer la equació, a desenvolupar-ho tot. Però després ho vaig deixar perquè les de tercer grau no les havíem donat. No sabia ni per on agafar-ho. Després, al llegir-ho varies vegades vaig veure que era molt més fàcil, era multiplicar això i ja està.

E: I les operacions? Vos vaig dir que ho féreu tot ací.

A: Les vaig fer en un full apart.

28) $5b + 6r = 90$ cèntims.

E: Val, la última. Llegim-la. Què pots dir sobre b i r ?

A: (La llig) Doncs, a veure, b és el nombre de llapis blaus i et diu que t'han costat... No, que val 5 cèntims cada llapis. Aleshores, 5 per p vol dir el preu que t'han costat els llapis blaus. I el 6 són els cèntims que costa cada llapis roig i, llavors, cada llapis roig és r . Per tant, multiplique i dóna la suma de tot dóna 90

E: Molt bé, perquè 90 ens diu que és el preu, no? I si jo ara volera trobar un cas particular del problema, com ho faria? Per exemple, si jo comprara 1 llapis blau, quants n'hauria de comprar per a gastar-me 90 cèntims en total?

A: Doncs com 1 llapis blau és la b , 5 per 1, 5. Aleshores, aïllaria la r ...

E: Fes-ho al full!

A: A veure, seria... Deixaria la r sola i seria $90 - 5$ entre 6... No dóna exacte.

E: Molt bé, aleshores no seria una solució perquè no pots comprar parts d'un llapis. Sabries dir-me en quins casos tindria solució? Mira, si aïllem la b en compte de la r ho vories més fàcilment. Quins nombres podria valdre la r per a que la b donara exacta?

A: Un nombre que tinga 5 o 0. (Es refereix a les terminacions del numerador)

E: Molt bé. A més, com 90 acaba en 0, el resultat de 6 per r també haurà d'acabar en 5 o 0 per a que la resta siga 0 o 5.

A: Exacte.

E: Mira, agafa r com a 5... Dóna que b és 12, d'acord? Aquest seria un cas. Si r és 15, tot i que acaba en 5 ja no val.

A: Ah, clar.

E: Molt bé, doncs ja està. Moltes gràcies per vindre!

1) A 4.

E: A veure, la primera pregunta. Si a és igual a 3, a què és igual $4a$? Dius que $a = 4$, creus que és correcta la resposta?

A: Jo crec que sí.

E: Per què? Com ho has fet?

A: Perquè si 4 per a és el mateix que $a \cdot 3$... Aleshores, si a és igual a 3, a és igual a 4. Saps el que vull dir?

E: No. Explica't millor.

A: Que $a = 3$ és com si posara $3a$.

E: No, no és el mateix.

A: Aleshores no ho sé, ho havia posat per això.

E: $4a$ què és?

A: Doncs 4 vegades a .

E: Molt bé, que és el mateix que 4 per a , no?

A: Sí.

E: I si jo vull saber què val 4 per a i la a és 3...? Què valdrà 4 per a ?

A: 12.

E: Així és, 4 per 3, 12. Eixa estava malament. Ho entens, no?

A: Sí, ara ja sí.

2) c) $5 \times n$, e) $n + n + n + n + n$.

E: Molt bé, passem a la següent pregunta. Què significa $5n$?

A: Doncs 5 per n ... (la c))

E: Molt bé.

A: I cinc vegades n (la e)).

E: Molt bé. Aquesta seria correcta també (la d) $5 + 5 + 5 + 5 + 5$) o no?

A: No, perquè això és 5 vegades 5.

E: Perfecte. Una altra respostes correcta que no està ací també podria ser n per 5...

3) a) $e \times 3$, c) $3 \times e$, e) $e + e + e$.

E: Val, què significa $e3$?

A: e per 3 (la a)) és $e3$...

E: Són correctes totes les que has senyalat?

A: Jo crec que sí. La c) és igual que la a) i la e) 3 vegades e , $e3$.

E: Molt bé, estic d'acord amb tu.

4) b) $n \times m$.

E: Què significa nm ?

A: Doncs $n \times m$.

E: Alguna més?

A: Crec que no.

E: 25 per 26 podria ser un cas de n per m , no?

A: Però no ho saps.

E: Però molt bé, com no ho saps no té perquè ser 25 per 26. Molt bé.

5) b) $3 \times (e + 2)$, f) $e + 2 \times 3$.

E: Quina de les següents expressions escriuries per a representar $e + 2$ multiplicat per 3?

A: (Pensa durant una estona) Eixa està malament (la b)) i és ixa (la d)) i ixa (la f)).

E: Segur? La b) està malament?

A: Segur, la b) no és un número per $e + 2$.

E: Però en la pregunta 2 no m'has dit que $5n$ és 5 per n ? Ací és el mateix.

A: Ah, clar. Però $e + 2$ multiplicat per 3 no és $3x$, saps? Seria 3...

E: Val, però es que açò és un per, no una x .

A: Ah! Em pensava que era una x ! Doncs sí, està bé.

E: Sí? I la d)?

A: La d) també seria correcta. I eixa no (la f)).

E: La f) no?

A: No, perquè no està el parèntesi i sols multiplica al 2.

E: Molt bé! La e) seria correcta ($3e + 6$)? Mira-la bé.

A: Sí, perquè és com si açò ja ho hagueres fet (la multiplicació pel parèntesi), no?

E: Correcte, és com si tingueres la d), però ja multiplicada.

6) b) $5a + 2$, d) $2 + 5a$.

E: A veure, la següent. Quins de totes representa 2 sumat a $5a$?

A: Doncs eixa (la b)), i eixa (la d)).

E: Estan bé les dues?

A: Sí, crec. I eixa?

E: La a). Per què dius que eixa també?

A: Perquè és el mateix que la b) però en lletra.

E: Val, molt bé. Alguna més?

A: No, ja no.

7b) $6 + 2$, 7c) $r + 2$.

E: La 7). Explica'm com has fet açò. Què has pensat per a arribar a aquestes conclusions?

A: Doncs... No m'enrecordo...

E: Llig-ho tranquil·lament, no hi pressa.

A: Doncs... Com està sumat per 2 la x, he sumat això més 2.

E: Val, molt bé! És correcte. I la b) podries arreglar-la més?

A: Sí, 8.

E: I la c)?

A: $2r$

E: Segura?

A: No...

E: $2r$ què era?

A: 2 per r.

E: I 2 per r és el mateix que 2 més r?

A: No. Està bé com està.

7b') $4 \cdot 3$, 7c') $4t$.

E: I a l'altra columna?

A: Ací com està multiplicat, he posat el 4 en totes.

E: Sí, molt bé. I podries arreglar-ho més?

A: 4 per 3, 12 i l'altra ja no se pot més.

E: D'acord.

8a) 12 , $n + 9$, $7n$.

E: Passem ara a la pregunta 8). Explica'm com ho has pensat.

A: Doncs 12 , $n + 9$... i $7n$.

E: Però explica'm què has fet per a trobar eixos resultats. A més, estan bé totes?

A: La última no ho sé.

E: Si has de sumar 4 a $3n$...

A: Mmm...

E: Escriu-te-ho en el full. Això és el mateix que $7n$?

A: No.

E: Això què donaria?

A: No se pot?

E: Clar, no se pot. Dona $3n + 4$. I en l'altre què has fet? (En $n + 5 + 4$)

A: Doncs sumar-li 4 a 5, perquè els nombres es poden sumar.

E: Perfecte. La següent.

8b) 32, $n + 20$, $12n$.

E: Explica'm aquests.

A: Doncs 3 per 4 és 32, ... Eixa està bé no? Seria $12n$?

E: Molt bé, perquè multipliques el 3 pel 4. I en la segona què fem?

A: No està bé, no? Seria... $4n + 20$.

E: Exacte. Ahí què havies fet, multiplicar sols el 5, no?

A: Sí.

9) La més gran: $n + 1$, La més xicoteta: $n - 7$.

A: Esta crec que la vaig fer arreu...

E: Dius que $n + 1$ és la més gran i $n - 7$ la més xicoteta? Per què?

A: La més xicoteta és eixa ($n - 7$)

E: Perquè?

A: Perquè quan se multiplica positiu per negatiu se queda negatiu, no?

E: I ahí on estàs multiplicant?

A: Ah, no se multiplica? Ah val val...

E: On estaves multiplicant, quin positiu? El + de la n ?

A: Sí, el de la n . Però és restar... El més xicotet seria n .

E: Si tinguérem que n fóra 10, quin seria més xicotet 10 o $10 - 7$?

A: $10 - 7$.

E: Si fora la n 20, 20 o $20 - 7$?

A: $20 - 7$. Aleshores la més xicoteta és $n - 7$.

E: Val.

A: I la més gran $n + 4$, perquè li sumes el major nombre a la n , no?

E: Molt bé. Ara, si jo t'haguera preguntat si és més gran $n + 4$ o $x - 7$, què m'hagueres contestat?

A: $n + 4$.

E: Si et fixes en aquest cas no podries dir que és $n + 4$.

A: Per què?

E: Perquè n i x són dos nombres que no saps. Si per exemple n fora 1, $1 + 4$ són 5 i si x fóra 100, $100 - 7$ són 93, que és major.

A: Ah, val!

E: Ahí no podriem dir quin és més gran. Però en este en el que estem sí, perquè tinguem en tots els casos el mateix nombre, que és n .

10) $2n$ perquè se multiplica.

E: Què és major, $2n$ o $n + 2$?

A: $2n$

E: I dius que és perquè se multiplica. Però què has fet per a saber-ho?

A: Doncs que $n + 2$ se suma i $2n$ se multiplica. Aleshores si n és el mateix nombre... Si poseu ahí un 4 per exemple, 2 per 4 vuit i 4 més 2 sis.

E: I si jo et dic ara, imagina que la n és 1. Què passaria?

A: Doncs 2 i 3.

E: I ara quina és més gran?

A: El $2 + n$.

E: Molt bé.

A: Aleshores, depèn del nombre.

E: Exacte. Però anem a ser més concrets. Què passaria si ara n fora 2?

A: Què serien iguals.

E: Si et fixes, si agafem 4, 5, 3, 1000... Sempre serà més gran $2n$ perquè és una multiplicació. Però en el cas en que la n siga 2 seran iguals. I en el cas en que la n siga...

A: Quan siga 1 serà major $n + 2$.

E: Si, però no sols quan siga 1, quan siga 1.5 també. Mira-ho! (Escriu $2n = 3$ i $n + 2 = 2.5$). Aleshores, quan n siga menor que 2 la més gran serà $n + 2$. D'acord?

A: D'acord.

11) Àrea = $6 \cdot 2 = 12$.

E: A veure, com escriuries l'àrea d'aquest rectangle?

A: Es que jo açò de l'àrea no ho entenc.

E: Val, tu pensa. Com es calcula l'àrea d'un rectangle?

A: Base per altura, no?

E: Val. I què mesura l'altura.

A: 6

E: I la base, què val?

A: 2.

E: Assenyala'm què és la base.

A: Açò (assenyala sols el trosset del 2)

E: I açò no és base també? (El trosset de la P)

A: Ah, val.

E: Aleshores què valdrà la base? (Es queda callada) Si la P fóra un 3, què valdria tot açò?

A: 5.

E: Aleshores?

A: $P + 2$?

E: Sí. Per tant, quina serà l'àrea sabent que l'altura és 6 i la base $P + 2$?

A: 6 per 2 per P.

E: Segura?

A: Doncs 6 per 2 més P.

E: A veure, escriu-ho (Ho fa bé). Molt bé. Podries desenvolupar-ho més?

A: $12 + 6P$?

E: Molt bé. Veus com sí que ho saps fer!

A: Es que els polígons se me donen molt malament.

12) a) $7a^2$, b) $7ab$, c) $a^2 + b$, d) $2a^2 + 5b$, e) $a - b^2$, f) $2a - b$, g) a^2 , h) $4a - b$, i) a^2 .

E: Passem ara al 12). Ací ens donen com a pista que la expressió a més 3a es pot escriure com 4a. Anem a la a). És correcta?

A: 2a més 5a, $7a^2$. Jo crec que sí.

E: Torna a llegir l'exemple, $a + 3a = 4a$, no $4a^2$.

A: Ah. Però entones en la b) no se poden agrupar, no?

E: Molt bé, no es poden agrupar. Però la a) què donaria?

A: 7a.

E: Molt bé. Passem a la c.

A: Doncs... a al quadrat? O a...? Ah, val val, és a més ab.

E: Agrupes la a amb la b? Com ho has fet?

A: Primer el parèntesi.

E: Però a i b no es poden sumar!

A: Doncs llevaria el parèntesi. Seria 2a més b.

E: Molt bé, això sí!

A: Es que jo em lie quan és 2a i a^2 . En l'examen li ho vaig preguntar a la professora i se va riure.

E: Doncs quan es multipliquen és a^2 i quan es sumen 2a.

A: Val.

E: Anem ara a la d). Està bé?

A: No, és 3a més 5b.

E: Molt bé. I pots agrupar-ho més encara?

A: No, perquè són diferent lletra.

E: I en la e)?

A: Se queda a solament.

E: Per què?

A: Perquè b menys b és zero.

E: Aleshores el parèntesi és com si el llevares, no?

A: Sí. Mare meua que mal estava este.

E: Bé, però ara ja saps com es fa no?

A: Sí.

E: Això és el que importa. A veure, ara la f).

A: Doncs $2a$ menys b . Eixa sí que està bé!

E: Molt bé. I la g)?

A: Doncs este és ... $2a$ perquè $-a$ i $+a$ se'n van i a i a, $2a$.

E: Perfecte.

A: Ara ela h)... $3a$ menys b més a ... $4a$ menys b .

E: Molt bé. I l'última?

A: a més b més a menys b ... $2a$.

E: Has llevat els parèntesis, no? I ho has sumat.

A: Sí.

13a) 45.

E: Passem a la 13. Per què dius què $a + b + 2 = 45$?

A: Doncs perquè si $a + b$ és 43, li sumes 2 i tens 45.

E: D'acord, molt bé.

13b) 761.

E: Ara, así dones com a resposta 761. Per què? Com ho has fet?

A: Mmm... No m'enrecorde...

E: Jo veig uns càlculs per así...

A: Ah, vaig sumar això (762 i 246), vaig restar i me va donar.

E: O siga, vas resoldre la equació i, amb el valor de n , el vas substituir a l'altra.

A: Sí.

E: Molt bé, és una forma de veure-ho. Hi ha una altra forma més ràpida. Si a n li restes 246, dóna 762. Si li llevem una més, ens donarà un menys.

A: Ja, així és més fàcil.

13c) $8 + g$.

E: I en l'apartat c)? Per què has posat això?

A: Doncs, perquè si això ($e + f$) dóna 8, més g , 8 més g .

E: I això no es pot agrupar més, no? Per què?

A: Perquè si ho ajuntes més és com si multiplicarem.

E: Molt bé.

14a) $u = 4$.

E: Què pots dir d'aquest? Com ho has resolt?

A: Substituint la v per el 1 més 3, 4.

E: Perfecte. Molt facileta, eh.

14b) $m = 13$.

E: Ara el següent, com ho has deduït?

A: 3 per 4 dotze més 1, tretze.

E: Molt bé, substituïnt n pel seu valor i operant.

15a) Que $a = 3$.

E: En aquesta, com has calculat que a és igual a 3?

A: Com 5 menys 8 dóna 3...

E: 5 menys 8 dóna -3.

A: Ah, no! Volia dir 8 menys 5.

E: Com ho has fet, com una equació passant el 5 negatiu a l'altre costat?

A: No, jo crec que ho he fet com sempre... Mirant quin posem en a per a que dóna 8.

E: Està molt bé també.

15b) $b = b$.

E: Ara, què pots dir sobre b si $b + 2$ és igual a $2b$?

A: He he he. Doncs... que b és igual a b .

E: Dona, jo crec que això està prou clar.

A: No sé, es que no ho entenc.

E: Hem de trobar un nombre, que és b , que faci que els dos costats del igual valguen el mateix. Per què vas posar $b = b$?

A: Perquè si $b + 2$ és $2b$, $2b...$ b és igual a 2.

E: Això sí! A més aquesta expressió ja l'hem viat a l'activitat 10! I havíem dit que $2n$ i $n + 2$ eren iguals per a $n = 2$!

A: Ah! És veritat!

E: Dis-me com ho has pensat ara per a que et donara 2.

A: Doncs perquè si $2b$ és igual a $b + 2$, b tenia que ser 2, perquè $2 + 2$ és $2b$ perquè b és 2.

E: Molt bé.

16) $r = 30 - s - t$.

E: Ara, explica'm com has tret aquesta.

A: (El llig detingudament) Pos això, està bé, no?

E: Mal no està. Però pots traure més coses perquè ací la resposta no està completa.

A: I que li falta?

E: Pensa-ho. Si ací et diuen que $r = s + t$, això no voldrà dir que posar r i posar $s + t$ és el mateix?

A: Sí.

E: Mira ara l'altra equació. No seria el mateix posar ací r en compte de $s + t$?

A: Aleshores serà això ($r = 30 - s - t$), no?

E: No, ací encara hi ha s i t . Oblida't d'això. Si posem ací (en $r + s + t = 30$) r què tindrem?

A: $2r$ més 30.

E: Molt bé, i això què vol dir.

A: Si $2r$ és 30...? Què r és 60.

E: Escriu-ho al full. (Escriu $r = 30 - 2$). Si el 2 està multiplicat, com passa a l'altre costat?

A: Dividint? Donaria 15.

E: Així sí.

A: Què difícil...

17) c és major que d .

E: A veure, què pots dir ara de c si $c + d$ és igual a 10 i c és menor que d ? I dius, que c és menor que d . Molt bé, però això ja estava a l'enunciat! Si tens que un nombre li sume un altre i em dóna 10 i un és més xicotet que l'altre, què pots dir-me?

A: Que c pot ser 4, 3, 2, 1...

E: Podria ser 0 també?

A: Sí, i la d 10.

E: Podria ser -1?

A: Mmm... Sí.

E: I què valdria la d ?

A: 1 més 9...

E: Seria 11, no?

A: Ah, sí!

E: Podria ser la c 7?

A: No, perquè diu que és menor que d .

E: Exacte, perquè si fora 7, la d hauria de ser negativa, i ja no seria major que c . I pot ser la c 3,9?

A: Sí.

E: I 4,9?

A: Sí

E: I 4,9999?

A: També.

E: I 5?

A: No, 5 ja no.

E: Aleshores, valdria qualsevol nombre que fora més xicotet que 5, no?

A: Val.

18a) $a = 2b + 3$.

E: (Llig la pregunta) Què has fet ací?

A: No ho sé...

E: Has posat un 2 davant de la b

A: Sí...

E: Que b augmente en 2 no significa que siga el doble, sinó que si la b fora per exemple 10, quedaria 12, no?

A: Sí.

E: Aleshores? Augmentar b en 2 es $b + 2$. Si en la expressió $a = b + 3$ posem $b + 2$ en lloc de b, quant augmenta la a?

A: a seria igual... A $5b$.

E: No. Escriu-te-ho! ($b + 2 + 3 = b + 5$). Aleshores, quant a augmentat la a si abans teniem $b + 3$ i ara $b + 5$?

A: En 2?

E: Sí, molt bé.

18b) $f = 5g + 1$.

E: Val, i ací què passa amb la f si augmente la g en 2?

A: Què també augmentarà en 2?

E: No, pensa-ho. Ara davant de la g tinc un 5 que està multiplicant.

A: Dons se multiplica 2 per f. No?

E: Si jo augmente la g...

A: Ah, que dins de la f se multiplica per 5.

E: A què et refereixes en això que dius de dins de la f?

A: Que en la f... A vore, que el que hi ha dins de la f, vale, el nombre que hi ha dins de la f es multiplica per 5.

E: Què és augmentar la g en 2?

A: Multiplicar... No, sumar-ho.

E: Si jo a la g li sume 2.

A: Doncs 3 per $2g$.

E: No, 3 per $2 + g$, no m'havies dit que se sumava?

A: Ah, sí.

E: Calculariem $3 \cdot (2 + g)$ i li sumariem 1, com diu ací. I açò dóna... $3g + 7$. Ho tens clar?

A: Sí, ara sí.

E: Aleshores hem augmentat la f en 6, perquè abans teníem $3g + 1$ i ara $3g + 7$.

Continue posant-li més exemples fins que pareix que ha captat la idea. Pense que li resulta un poc difícil d'entendre perquè no té ben assentats alguns conceptes bàsics.

19) a) $A = 12$, b) $A = 60$, c) $A = nm$, d) $A = 10$.

E: Ara ens diuen que calculem l'àrea d'aquestes figures. Com ho has fet això?

A: He multiplicat base per altura.

E: Val, en el primer cas 3 per 4, 12. Molt bé, i en la b)?

A: 6 per 10, 60. I n per m , nm ... I ahí m'he equivocat una altra vegada.

E: I què donaria?

A: Doncs 10... No.

E: Escriu-me-ho si vols.

A: A veure, com era... 5 per 2 per e , i donava 10, no?

E: Pensa-ho, tens temps per a pensar. Què és l'altura?

A: El 5.

E: I la base?

A: 2 per e ... Ah no, $2 + e$!

E: Val, aleshores?

A: Aleshores dóna... (Escriu $5 \cdot 2 + e$)

E: No faltaria alguna cosa? (Col·loca el parèntesi) Així, molt bé. I això què donaria?

A: 10 més e ... 10 més $5e$.

20) $P = 22$, $10 + 2 + 9 + 1$.

E: Val, aquesta és molt fàcil. Explica-m'ho. Què has fet ahí?

A: He sumat tots els nombres, 22.

21) a) $P = 3e$, b) $P = 4h + t$, c) $P = 16 + 2u$, d) $P = 2n$.

E: Explica'm ara aquest. Per què has contestat $3e$ en la a)?

A: Perquè ací hi ha 4 costats i posa $4g$ (a l'exemple que donen), doncs com ací hi ha 3 costats, $3e$.

E: I en la b)?

A: Doncs $4h$ i una t (Assenyalant els costats de la figura), $4h + t$.

E: Molt bé. Explica'm ara la c)

A: $10 + 6$, 16, més $2u$.

E: Has agrupat nombres i has agrupat lletres. Això pots sumar-ho més?

A: No.

E: I ara en aquesta?

A: Doncs, hi ha... x costats.

E: Exactament hi ha n .

A: Sí, i cada costat val 2 però com saps que hi ha n , doncs se multiplica, $2n$.

E: Molt bé. Com saps que hi ha n costats, encara que no estiguen tots dibuixats, saps que sumar n vegades 2 és $2n$, no?

A: Sí.

22) a) 54 diagonals, b) $2 - k$ diagonals.

E: Llegim aquest problema en veu alta. Si una figura amb 5 costats té 2 diagonals, una figura amb 57 diu que en té 54. És correcte?

A: (Es queda pensant) Sí, perquè has de restar-li'n 3, 57 menys 3.

E: Molt bé, i si una figura té k costats?

A: Doncs se resta 3, no?. Seria $3 - k$.

E: I si tingérem 100 costats?

A: Donc 3 menys 100.

E: Però 3 menys 100 què donaria? – 97, no?

A: Ah, k menys 3.

E: Clar!

23a) Sempre.

E: Va, que ja queda poc. Quant és certa aquesta igualtat? Per què dius que sempre?

A: Doncs perquè és el mateix que poses $A + B + C$ que $C + A + B$.

E: Val, l'únic que canvia és l'ordre dels sumands.

23b) Mai.

E: I la b)? Dius que mai, per què?

A: Sí, perquè has canviat les incògnites.

E: I les incògnites no poden ser iguals?

A: Sí, però si tu poses la L, la M i la N ací i la L, la P i la N allà, falta la M ahí!

E: I la P en l'altre costat també, no?

A: Sí.

E: Però la M...

A: Ah, poden valdre el mateix!

E: Clar! Llavors, que posaries?

A: Sempre.

E: Sempre no! Perquè si la M és 3 i la P 1, ja no serien iguals.

A: Ah, de vegades. Quan són iguals les incògnites, M i P.

E: Perquè la L serà igual a la L sempre i la N a la N. Necessariament M i P han de ser iguals si volem que es complisca l'equació.

24) J + P

E: Quantes caniques tenen entre els dos?

A: Doncs J més P.

E: Per què?

A: Perquè si Joan en té J i Pere P, per a juntar-les, J + P.

E: Molt bé.

25) a) $70 \cdot 2 \cdot h = 140h$, b) 78 €.

E: Val, llig aquest problema. (El llig) Explica-me'l.

A: He posat algo però no és una equació.

E: Com que no?

A: Sí, però no està W.

E: Això sí. El cas és que entendre el problema l'has entès perquè el b) l'has fet bé. Perquè has posat que el sou de Maria és el sou base, que és 70, més si ha treballat 4 hores extra cobrant 2 euros per cadascuna, 8. Aleshores 70 més 8, 78. Ací simplement havies de posar el mateix procés que has fet en la b) però en alguna que altra lletra. A què serà igual el sou W?

A: A 70 més W... No, és h per 2.

E: Ja està, molt bé.

A: Ací anava per ahí la cosa el que passa és que havia posat un x en compte d'un + (entre el 70 i el 2h).

E: Sí, et faltava el W igual a tot això i ja ho tenies.

26) Que tens 4 pastissos i 3 coques.

E: En aquesta, què significa 4p més 3c?

A: (Es queda pensant) Doncs això, que tens 4 pastissos i 3 coques.

E: Però què és la p?

A: 4. Ah no, el preu.

E: Molt bé, el preu d'un pastís. Aleshores 4p què serà?

A: El que valen 4 pastissos.

E: I 3c?

A: El que valen 3 coques.

E: Aleshores, $4p + 3c$ què serà?

A: El que valen totes les coques i els pastissos.

E: Molt bé.

27) $x = 2$. Explicació: Divideixes 6 que val la x entre 3, aleshores $3 \cdot 2 = 6$ que val el mateix que 6.

E: Val, explica'm què has fet per a trobar que x és 2.

A: No m'enrecorde... (Està pensant durant 30 segons).

E: No t'enrecordes?

A: No.

E: Podria ser que intentares comparar les dues equacions?

A: Sí, això és. Tinc que dividir el 6 entre 3.

E: Per què? Per què has comparat açò (x) amb açò altre ($3x$)?

A: Sí. Si açò (la x) val 6, açò ($3x$) ha de valdre 6. I ahí la x ha de ser 2, perquè 3 per 2 són 6.

E: Perfecte!

28) Ha comprat 10 llapis rojos $6 \times 10 = 60$ i ha comprat 6 llapis blaus $5 \times 6 = 30$. $60 + 30 = 90$ cèntims en total.

E: L'última! Llig-la i explica'm la teua resposta.

A: (La llig) No està bé.

E: Per què?

A: Perquè pot tindre més resultats.

E: Molt bé, quins resultats? Pots escriure'm la relació?

A: A veure... (Escriu $90 = b + r$) Pos b i r ha de ser 90.

E: 90 què és?

A: El preu total.

E: i b que era?

A: Els llapis blaus.

E: El nombre de llapis blaus. Ací estàs diguent-me que el nombre de llapis blaus i rojos és 90 cèntims.

A: Ah, seria $5b$ i $6r$! (Escriu $90 = 5b + 6r$)

E: Molt bé. Com $5b$ és el que valen els llapis blaus i $6r$ el que valen els rojos, $5b + 6r$ igual a 90. Val. I ara pots explicar-me la resposta que havies donat?

A: Doncs, el primer nombre que em va vindre al cap el vaig posar. 90 és 60 més 30. Aleshores, vaig multiplicar 6 per 10 que dona 60 i 6 per 5, 30.

E: T'ho vas arreglar per a que et donara bé, no?

A: Si! Je je.

E: Però en realitat eres conscient de que hi ha moltes solucions.

A: Sí.

E: Ara mateix no sabriem quantes serien exactes i quantes no, perquè per exemple si poses ací 4 ($b = 4$), 5 per 4, 20 i no hi ha cap nombre enter que multiplicat per 6 i sumat a 20 done 90.

A: Ja...

E: Però per exemple, si posem $r = 5$ 6 per 5, 30. I la b què tindrà que ser?

A: Doncs... 12!

E: Molt bé, perquè 12 per 5 són 60. Una altra resposta distinta de la que havies donat tu. Veus, podrien haver més d'una resposta.

A: clar.

E: Val, ja està tot. Moltes gràcies!

A: Adéu!

A les entrevistes amb els distints alumnes no sols he intentat averiguar quina és la interpretació que fan de les lletres sinó també he intentat, utilitzant les preguntes adequades, guiar-los cap a la solució correcta per tal de que puguin comprendre i continuar avançant en el seu desenvolupament. A més, en alguns dels cassos he intentat anar més enllà amb les preguntes per tal d'extraure la màxima informació possible.